

Eigenspannungen in unendlichen geschichteten und elastisch anisotropen Medien, insbesondere in WEISSschen Bezirken und in geschichteten Platten

Rieder, Georg

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 11, 1959,
S.20-61



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Eigenspannungen in unendlichen geschichteten und elastisch anisotropen Medien, insbesondere in WEISSschen Bezirken und in geschichteten Platten

Von Georg Rieder

Vorgelegt von Herrn H. Schaefer

(Eingegangen am 20. März 1959)

Summary: The differential equations for internal stresses in infinite elastic media [1], [2] are specialized for one independent variable only; their solution may be reduced, then, for given extra stresses resp. extra strains [2] to quadratures and algebraic calculations. The formulae obtained are used to compute the magnetostrictive internal stresses in the Weiss domains and Bloch walls of ferromagnetic single crystals. Furthermore the phenomena to be expected when cutting out a plate of finite thickness are investigated and possibilities for measuring internal stresses in stratified anisotropic plates (e.g. metal-clad sheets or plywood) discussed.

Übersicht: Die Differentialgleichungen für Eigenspannungen in unendlichen elastischen Medien [1], [2] werden auf eine einzige unabhängige Veränderliche spezialisiert; ihre Lösung kann dann bei vorgegebenen Extraspannungen bzw. Extradehnungen [2] auf Quadraturen und algebraische Rechnungen zurückgeführt werden. Die gewonnenen Formeln werden auf die Berechnung der magnetostruktiven Eigenspannungen in den Weisschen Bezirken und Blochschen Wänden ferromagnetischer Einkristalle angewandt. Ferner werden die Erscheinungen beim Herausschneiden einer Platte endlicher Dicke untersucht und Möglichkeiten zur Messung von Eigenspannungen geschichteter anisotroper Platten (z. B. für plattierte Bleche oder Sperrholz) diskutiert.

1. Einführung

Der Begriff des *unendlichen Mediums* wird in der Physik immer dann mit Vorteil benutzt, wenn Rand- und Oberflächeneffekte keine Rolle spielen und ein beliebiges genügend weit von der Begrenzung herausgegriffenes Stück des untersuchten Körpers typisch ist für seine weitere Umgebung. Das heißt, die Verteilung der interessierenden Größen und Eigenschaften ist entweder gleichförmig (z. B. homogener Spannungszustand im homogenen elastischen Körper) oder periodisch (z. B. Elektronendichte im ungestörten Kristallgitter) oder zufällig mit konstanten statistischen Parametern (z. B. Elastizitätskonstanten im Polykristall [3]). In allen diesen Fällen darf man von Begrenzungseffekten abstrahieren und kann sich das untersuchte Stück nach allen Seiten ins Unendliche fortgesetzt denken. So kann auch, z. B. zur Beschreibung des Zustandes weit genug im Innern eines genügend großen plastisch verformten Körpers, eine periodische oder statistische Verteilung von Eigenspannungsquellen physikalische Bedeutung haben; nur ist z. B. eine gleichförmige oder im statistischen Mittel für ein Vorzeichen überwiegende Verteilung von Versetzungen oder Inkompatibilitäten auszuschließen, da sonst die resultierenden Spannungen bei Vergrößerung des Körpers über alle Grenzen wachsen.

Die Ursache der Eigenspannungen kann, vollständige Kenntnis aller plastischen und quasiplastischen (z. B. magnetostriktiven) Vorgänge vorausgesetzt, auf zwei vom Standpunkt der Elastizitätstheorie völlig gleichberechtigte Arten beschrieben werden [2], nämlich einmal nach der *Spannungstheorie* durch die *Extraspannung* σ_{ij}^Q , die zusammen mit der nach dem Hookeschen Gesetz aus der Gesamtdehnung ε_{ij}^G folgenden *dehnungswirksamen Spannung*

$$\sigma_{ij}^D = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^G \quad (1.1)$$

die *Gesamtspannung*

$$\sigma_{ij}^G = \sigma_{ij}^D + \sigma_{ij}^Q \quad (1.2)$$

ergibt, oder zum andern nach der *Dehnungstheorie* durch die *Extradehnung* ε_{ij}^Q , die zusammen mit der nach dem Hookeschen Gesetz aus der Gesamtspannung σ_{ij}^G folgenden elastischen Dehnung

$$\varepsilon_{ij}^E = s_{ijkl} \sigma_{kl}^G \quad (1.3)$$

die *Gesamtdehnung*

$$\varepsilon_{ij}^G = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^Q \quad (1.4)$$

ergibt. Die Umrechnung von σ_{ij}^Q in ε_{ij}^Q oder umgekehrt erfolgt durch

$$\varepsilon_{ij}^Q = -s_{ijkl} \sigma_{kl}^Q \text{ bzw. } \sigma_{ij}^Q = -c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^Q \quad (1.5)$$

wie man leicht sieht, wenn man (1.4) beiderseits mit c_{ijkl} doppeltskalar multipliziert, (1.1) und (1.3) einsetzt und mit (1.2) vergleicht. Anschaulich macht man sich die Bedeutung des Minuszeichens in (1.5) am leichtesten an dem analogen Beispiel aus der Aerostatik klar, wonach sich die Vermehrung einer abgeschlossenen Gasmenge ebensogut als Erhöhung des (in seinen Tensorkomponenten negativen) Druckes bei konstantem Volumen wie als Erhöhung des Volumens bei konstantem Druck beschreiben läßt.

Die beiden Postulate, daß die Gesamtspannung eine Gleichgewichtsspannung, also bei Abwesenheit äußerer Volumenkräfte divergenzfrei, und die Gesamtdehnung kompatibel, d. h. aus einer Verschiebung u_i ableitbar sein soll, führen auf zwei gleichwertige Differentialgleichungssysteme, nämlich nach (1.2) auf

$$\text{Div} [c_{ijkl} (\nabla_k u_l + \overline{\varepsilon_{kl}})] = -\text{Div} (\sigma_{ij}^Q) \quad (1.6)$$

und nach (1.4) mit dem Ansatz $\sigma_{ij}^G = [\text{Ink} (\chi_{kl})]_{ij}$ auf

$$\text{Ink} \{s_{ijkl} [\text{Ink} (\chi_{mn})]_{kl}\} = -\text{Ink} (\varepsilon_{ij}^Q) \quad (1.7)$$

wie in [1], § 13 und [2] weiter ausgeführt ist. Dazu kommt beim endlichen Körper die Randbedingung verschwindender Oberflächenkräfte, die im Grenzfall des unendlichen Mediums übergeht in die Integralbedingung

$$\overline{\sigma_{ij}^G} = 0 \quad (1.8)$$

wo die Überstreichung Mittelung über den ganzen Raum bedeutet.

Lieferrn nun die Gleichungssysteme (1.6) und (1.7) auch dasselbe Ergebnis [1], [2], so führen doch die der Spannungs- und der Dehnungstheorie zugrunde liegenden physikalischen Vorstellungen auf verschiedene Energieterme. Denn die zugehörigen Gedankenversuche gehen von verschiedenen eigenspannungsfreien Grundzuständen aus; während sich die Spannungstheorie vom Bilde intermolekularer Kräfte im intakten Kristallgitter herleitet, wie sie etwa im Ferromagnetikum in der die Magnetostriktion erzeugenden Spin-Gitter-Koppelung verwirklicht sind¹⁾, werden die Vorstellungen der Dehnungstheorie meist am Zerschneidungsversuch entwickelt, in dem an den einzelnen, aus dem Zusammenhang gelösten Volumenelementen Materie entfernt oder angesetzt oder beim Wiedereinbau die beiden Ufer der Schnittflächen gegeneinander verschoben werden; diesem Bilde entspricht auch der Mechanismus der plastischen Verformung durch Wanderung von Versetzungen [1]. Der Übergang aus dem verspannten in den jeweils gewählten Grundzustand erfolgt also im ersten Falle auf kompatibelem Wege (d. h. unter Wahrung des Zusammenhangs) durch Beseitigung der Ursache der Eigenspannungen (Verschwinden der Magnetostriktion am Curie-Punkt, Abbau der Wärmespannungen durch Temperaturengleich), im zweiten Falle durch vollständiges Nachgeben gegenüber der festgehaltenen Extradehnung, wie sie durch Zerschneiden des Körpers in genügend kleine Volumenelemente ermöglicht wird (vgl. die experimentellen Eigenspannungsbestimmungen oder den Abbau innerer Spannungen durch Versetzungswanderung bei Erholungsvorgängen).

Die mechanische Arbeit, die bei reversibler Führung der beiden letzten Gedankenversuche gewonnen werden kann, ergibt sich im ersten Fall aus der *kompatiblen Energiedichte*

$$w_{\text{komp}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^G c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^G = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^G \sigma_{ij}^D \quad (1.9)$$

und im zweiten Fall aus der *inkompatiblen Energiedichte*

$$w_{\text{ink}} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^G s_{ijkl} \sigma_{kl}^G = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^G \varepsilon_{ij}^E, \quad (1.10)$$

welche bei Abwesenheit äußerer Kräfte mit der elastischen Energiedichte w_{el} identisch ist. Dagegen können in w_{komp} Anteile enthalten sein, die mit Eigenspannungen gar nichts zu tun haben, wie sie etwa zur nach außen in Erscheinung tretenden pauschalen Wärmeausdehnung oder zur pauschalen Magnetostriktion eines Körpers gehören, dessen Temperatur bzw. Magnetisierung im Innern um einen Mittelwert schwankt. Die kompatible Energie braucht nicht einmal in völlig eigenspannungsfreien Körpern zu verschwinden, denn es gilt, wie man mit (1.2) bis (1.5) zeigen kann

$$w_{\text{ink}} + w_{\text{komp}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^G \sigma_{ij}^G + \sigma_{ij}^G \varepsilon_{ij}^G, \quad (1.11)$$

wo w_{ink} und das zweite Glied der rechten Seite offensichtlich bei räumlich

¹⁾ Den Ausdruck $\text{Div}(\sigma_{ij}^G)$ kann man als *innere Volumenkräftedichte* bezeichnen [4], wenn man das zu Wertungen verleitende Wort *feld* vermeiden will.

konstanter Extradehnung¹⁾ und freier Oberfläche verschwinden. Das allein verbleibende erste Glied der rechten Seite

$$w_{\text{frei}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^Q \sigma_{ij}^Q = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^Q s_{ijkl} \sigma_{kl}^Q = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^Q c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^Q \quad (1.12)$$

kann als Energiedichte der freien (d. h. unbehinderten) Dehnung bezeichnet werden und tritt vor allem in der Theorie des Ferromagnetismus mit umgekehrtem Vorzeichen als magnetostriktiver Anteil der Kristallenergie auf.

Integriert man (1.11) über das ganze Volumen eines endlichen Körpers mit freier Oberfläche²⁾, so verschwindet bei Gültigkeit der obigen Grundpostulate für Gesamtspannung und Gesamtdehnung das zweite Glied der rechten Seite; für die auf den Gesamtkörper bezogenen Energiewerte gilt also mit (1.12)

$$W_{\text{ink}} + W_{\text{komp}} = W_{\text{frei}}. \quad (1.13)$$

Bei dem in dieser Arbeit behandelten Fall des *gleichmäßig gestörten* unendlichen Mediums tritt an die Stelle der Integration die Mittelung über den ganzen Raum. Kompatible und inkompatible Energie können also beide sowohl im Rahmen der Spannungs- als auch der Dehnungstheorie definiert werden, wenn man nur eine Energie der freien Dehnung in physikalisch sinnvoller Weise erklären kann. Zweckmäßigerweise benutzt man in manchen Fällen statt (1.9) die modifizierte kompatible Energiedichte

$$\begin{aligned} w_{\text{komp}}^* &= w_{\text{frei}} - w_{\text{ink}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^Q \sigma_{ij}^Q - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^E \sigma_{ij}^E \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^Q c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^Q - \sigma_{ij}^E \varepsilon_{ij}^E \end{aligned} \quad (1.14)$$

die im allgemeinen nur im Integral mit w_{komp} übereinstimmt. Die Variation von (1.9) und (1.14) liefert nach kurzer Umformung

$$\delta w_{\text{komp}} = -\varepsilon_{ij}^Q \delta \sigma_{ij}^Q + \varepsilon_{ij}^E \delta \sigma_{ij}^E \quad (1.15)$$

$$\delta w_{\text{komp}}^* = -\varepsilon_{ij}^Q \delta \sigma_{ij}^Q - \sigma_{ij}^E \delta \varepsilon_{ij}^E \quad (1.16)$$

Hier ist das erste Glied nur in denjenigen Volumenelementen von Null verschieden, in denen die Extraspannung variiert wird, während das zweite bei Abwesenheit äußerer Kräfte im Integral bzw. im räumlichen Mittel verschwindet³⁾. Somit ist

$$d \delta W_{\text{komp}} = -\varepsilon_{ij}^Q \delta \sigma_{ij}^Q dV \quad (1.17)$$

¹⁾ Dies ist nur beim elastisch homogenen Körper gleichbedeutend mit räumlich konstanter Extraspannung (vgl. (1.5)).

²⁾ Oder, was auf dasselbe herauskommt, über ein unendliches Medium, dessen Extradehnung rasch genug im Unendlichen verschwindet.

³⁾ Bei Anwesenheit äußerer Kräfte hebt sich das zweite Glied von (1.16) im Integral gegen die Arbeit der äußeren Kräfte weg (vgl. [7], (3.1) bis (3.5)). Bei sinngemäßer Erweiterung des Begriffes der kompatiblen Energie bleibt also (1.17) unter gewissen Voraussetzungen [7] auch in Gegenwart äußerer Kräfte anwendbar.

die mit einer Variation $\delta \sigma_{ij}^Q$ der Extraspannung im Volumenelement dV verbundene Änderung der kompatiblen Energie im ganzen Volumen. Entsprechend kann man für die inkompatible Energie ableiten

$$\delta w_{\text{ink}} = -\sigma_{ij}^G \delta \varepsilon_{ij}^Q + \sigma_{ij}^G \delta \varepsilon_{ij}^G \quad (1.18)$$

und

$$d \delta W_{\text{ink}} = -\sigma_{ij}^G \delta \varepsilon_{ij}^Q dV \quad (1.19)$$

Ein praktisch wesentlicher Gesichtspunkt für die Wahl zwischen (1.9) und (1.14) ist die Frage, ob etwa das zweite Glied in (1.15) oder (1.16) nicht nur im Integral, sondern auch in den betrachteten Volumenelementen selbst verschwindet. Wie sich noch zeigen wird, trifft das in dem hier behandelten Fall geschichteter Eigenspannungsquellen für (1.16) dann zu, wenn die Dicke der Schichten variierender Extraspannung gegenüber der Dicke der übrigen Schichten vernachlässigt werden kann. Somit ist in diesen Fällen der Energiedichte w_{komp}^* der Vorzug zu geben.

Integration bzw. Mittelung über den ganzen Raum erlaubt noch folgende Umformungen [2]:

$$W_{\text{komp}} = \frac{1}{2} \overline{\varepsilon_{ij}^G c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^G} = -\frac{1}{2} \overline{\sigma_{ij}^G \varepsilon_{ij}^G} = \frac{1}{2} \overline{(u_i^G \nabla_j \sigma_{ij}^G - \sigma_{ij}^G \varepsilon_{ij}^G)} \quad (1.20)^1$$

$$W_{\text{ink}} = \frac{1}{2} \overline{\sigma_{ij}^G s_{ijkl} \sigma_{kl}^G} = -\frac{1}{2} \overline{\varepsilon_{ij}^Q \sigma_{ij}^G} = \frac{1}{2} \overline{\chi_{ij} [-\text{Ink}(\varepsilon_{kl}^Q)]_{ij}} \quad (1.21)^1$$

1.20) führt auf die anschauliche Deutung von W_{komp} als einer von inneren, d. h. aus dem Kristallgitter selbst kommenden Kräften gegen die elastischen Bindungskräfte geleisteten Arbeit. Auch das im endlichen Körper an Stelle von $-\frac{1}{2} \overline{\sigma_{ij}^Q \varepsilon_{ij}^G}$ auftretende Oberflächenintegral fügt sich gut in dieses Bild ein.

2. Spezialisierung auf das geschichtete Medium

Der anschaulichste und wohl auch der kürzeste Weg zur Lösung des Eigenspannungsproblems bei einer einzigen unabhängigen Veränderlichen z geht nicht von den Differentialgleichungen (1.6) und (1.7) aus, sondern unmittelbar von (1.1) bis (1.5) und den beiden Grundpostulaten. Zur Vereinfachung der Darstellung im anisotropen Medium ersetzt man zweckmäßigerweise die Indexpaare ij, kl, \dots usw. nach dem Vorgang von Voigt [5], [6] durch Einzelindizes a, b, \dots usw. Die symmetrischen Tensoren von Spannung und Dehnung kann man dann durch Spalten- (oder Zeilen-) Matrizen

$$(\sigma_a) = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}; (e_a) = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2 \varepsilon_{yz} \\ 2 \varepsilon_{zx} \\ 2 \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

¹⁾ Gegenüber [2] ist das Integralzeichen durch den Mittelungsstrich ersetzt und ein Vorzeichenfehler berichtigt worden.

ersetzen, und die (zahlenmäßig z. T. von den entsprechenden Tensorkomponenten c_{ijkl} bzw. s_{ijkl} durch einen Zahlfaktor unterschiedenen) Elastizitätskonstanten bzw. -koeffizienten c_{ab} und s_{ab} ordnen sich zu quadratischen symmetrischen Matrizen an. Das Hookesche Gesetz schreibt sich nun

$$\sigma_a^G = c_{ab} e_b^E \text{ bzw. } e_a^E = s_{ab} \sigma_b^G \quad (2.2)$$

und entsprechend alle anderen Formeln.

Mit den gegebenen Größen, der Extradehnung und den Elastizitätskonstanten, sollen auch alle anderen nur von z abhängen; die Richtigkeit dieser Annahme wird nachträglich durch die Widerspruchsfreiheit der Lösung unter Voraussetzung gleichförmiger, periodischer oder statistischer Verteilung bestätigt. Das erste Postulat, die Gleichgewichtsbedingung, führt dann zu der Folgerung, daß alle Gesamtspannungskomponenten mit z in den Indizes konstant und wegen (1.8) sogar gleich Null sein müssen, also

$$\sigma_3^G = \sigma_4^G = \sigma_5^G = 0. \quad (2.3)$$

Anschaulich heißt dies, daß in den Ebenen $z = \text{const.}$ die resultierenden Schub- und Normalspannungen verschwinden. Die Kompatibilitätsbedingung als zweites Grundpostulat verlangt andererseits, daß diese Ebenen alle in gleicher Weise verzerrt, also die Gesamtdehnungskomponenten $\varepsilon_{xx}^G, \varepsilon_{xy}^G, \varepsilon_{yy}^G$ im ganzen Raum konstant sein müssen. Somit gilt

$$e_1^G = \overline{e_1^G}; \quad e_2^G = \overline{e_2^G}; \quad e_6^G = \overline{e_6^G}. \quad (2.4)$$

Andernfalls würde die Verschiebung benachbarter Ebenen gegeneinander und damit die Komponenten ε_{zx}^G und ε_{zy}^G nach außen entgegen unseren Voraussetzungen über alle Grenzen wachsen¹⁾. Dagegen unterliegen die übrigen Komponenten der Gesamtdehnung keiner geometrischen Beschränkung, da sie einer mit unseren Bedingungen durchaus verträglichen Translation benachbarter Ebenen gegeneinander entsprechen.

Nun schreibt sich (1.2) nach Einsetzen von (1.1) und (1.5) in Voigtschen Matrizen

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^G \\ \sigma_2^G \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6^G \end{bmatrix} = c_{ab} \begin{bmatrix} \overline{e_1^G} \\ \overline{e_2^G} \\ e_3^G \\ e_4^G \\ e_5^G \\ \overline{e_6^G} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_1^G \\ Q_2^G \\ Q_3^G \\ Q_4^G \\ Q_5^G \\ Q_6^G \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

¹⁾ An sich wäre nach der Kompatibilitätsbedingung auch noch eine lineare Abhängigkeit dieser Komponenten von z zulässig; diese widerspricht jedoch der eingangs gemachten Voraussetzung der — wenigstens statistischen — Beschränktheit im Unendlichen. Vgl. dazu die Diskussion im Anschluß an die Behandlung der Platte endlicher Dicke, deren Durchbiegung eine solche Lösung darstellt.

Ist nun das Medium elastisch homogen, so liefert die räumliche Mittelung von (2.5) nach (1.8) bereits die mittlere Gesamtdehnung

$$\bar{e}_a^G = \bar{e}_a^Q \quad (c_{ab} = \text{const.}) \quad (2.6)$$

und damit wegen (2.4) auch die für die Berechnung der elastischen (inkompatiblen) Energie wesentlichen Komponenten der elastischen Dehnung

$$e_1^E = \bar{e}_1^G - e_1^Q ; e_2^E = \bar{e}_2^G - e_2^Q ; e_6^E = \bar{e}_6^G - e_6^Q \quad (2.7)$$

Dann ist das Gleichungssystem (2.9) für die Unbekannten

$$e_3^E = e_3^G - e_3^Q ; e_4^E = e_4^G - e_4^Q ; e_5^E = e_5^G - e_5^Q \quad (2.8)$$

auch unmittelbar zu lösen. Im inhomogenen Medium dagegen hat man nach der 3., 4. und 5. Zeile von (2.5) mit unbestimmten \bar{e}_1^G , \bar{e}_2^G und \bar{e}_6^G anzusetzen

$$\begin{aligned} c_{33} e_3^E + c_{34} e_4^E + c_{35} e_5^E &= -c_{31} (\bar{e}_1^G - e_1^Q) - c_{32} (\bar{e}_2^G - e_2^Q) - c_{36} (\bar{e}_6^G - e_6^Q) \\ c_{43} e_3^E + c_{44} e_4^E + c_{45} e_5^E &= -c_{41} (\bar{e}_1^G - e_1^Q) - c_{42} (\bar{e}_2^G - e_2^Q) - c_{46} (\bar{e}_6^G - e_6^Q) \\ c_{53} e_3^E + c_{54} e_4^E + c_{55} e_5^E &= -c_{51} (\bar{e}_1^G - e_1^Q) - c_{52} (\bar{e}_2^G - e_2^Q) - c_{56} (\bar{e}_6^G - e_6^Q). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems führt nach Einsetzen in das Hookesche Gesetz zu relativ übersichtlichen Formeln für die Gesamtspannung, ausgedrückt in den wesentlichen elastischen Dehnungskomponenten (2.7), und damit auch für die inkompatible Energie. Zunächst ist die Determinante von (2.9)

$$D = \begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

Setzt man dann nach (2.7) auf der rechten Seite von (2.9) die elastischen Dehnungskomponenten e_1^E , e_2^E und e_6^E ein, die aber im inhomogenen Medium erst bis auf die Konstanten \bar{e}_1^G , \bar{e}_2^G und \bar{e}_6^G bekannt sind, so lassen sich die restlichen elastischen Dehnungskomponenten in der Form

$$\begin{aligned} e_3^E &= K_{31} e_1^E + K_{32} e_2^E + K_{36} e_6^E \\ e_4^E &= K_{41} e_1^E + K_{42} e_2^E + K_{46} e_6^E \\ e_5^E &= K_{51} e_1^E + K_{52} e_2^E + K_{56} e_6^E \end{aligned} \quad (2.11)$$

anschreiben, wobei

$$K_{ab} = \frac{D_{ab}}{D} \quad (2.12)$$

und die Determinanten D_{ab} gebildet werden, indem man in der Systemdeterminante D die $(a - 2)$ -te Spalte ersetzt durch die Spalte

$$-\begin{pmatrix} c_{3b} \\ c_{4b} \\ c_{5b} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a = 3, 4, 5 \\ b = 1, 2, 6 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Durch Einsetzen in das nach (σ_a^G) aufgelöste Hookesche Gesetz (1.3) folgen die nicht verschwindenden Gesamtspannungskomponenten

$$\sigma_a^G = \left(c_{a1} + \sum_{b=3}^5 c_{ab} K_{b1} \right) e_1^E + \left(c_{a2} + \sum_{b=3}^5 c_{ab} K_{b2} \right) e_2^E + \left(c_{a6} + \sum_{b=3}^5 c_{ab} K_{b6} \right) e_b^E \quad (a = 1, 2, 6). \quad (2.14)$$

Die Formeln (2.10) bis (2.14) lassen sich zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} \sigma_1^G &= c_{11}^* e_1^E + c_{12}^* e_2^E + c_{16}^* e_6^E \\ \sigma_2^G &= c_{21}^* e_1^E + c_{22}^* e_2^E + c_{26}^* e_6^E \\ \sigma_6^G &= c_{61}^* e_1^E + c_{62}^* e_2^E + c_{66}^* e_6^E, \end{aligned} \quad (2.15)$$

wobei sich die mit den (u. U. freilich veränderlichen) Elastizitätskonstanten dimensionsgleichen Beiwerte c_{ab}^* durch passendes Rändern der Determinante D ergeben. Es ist, wie man leicht nachrechnet,

$$c_{ab} = \begin{vmatrix} c_{ab} & c_{a3} & c_{a4} & c_{a5} \\ c_{3b} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{4b} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{5b} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{vmatrix} = c_{ba} \quad (2.16)$$

($a, b = 1, 2, 6$)¹⁾

und die inkompatible Energiedichte

$$w_{\text{ink}} = \frac{1}{2} e_a^E c_{ab}^* e_b^E \quad (2.17)$$

($a, b = 1, 2, 6$)¹⁾

Für das homogene Medium, in dem die wesentlichen elastischen Dehnungskomponenten aus (2.6) und (2.7) schon bekannt sind, ist die Aufgabe damit gelöst. Im inhomogenen geschichteten Medium setzt man nun in (2.15) wieder die Ausdrücke (2.7) ein und mittelt über den ganzen Raum, wobei nach (1.8) die linken Seiten verschwinden. Schafft man dann von den verbleibenden Ausdrücken die bekannten e_a^Q auf die andere Seite, so erhält man für $\overline{e_1^G}$, $\overline{e_2^G}$

¹⁾ Für andere Werte von a und b liefert (2.16) das ebenfalls richtige Ergebnis Null; die entsprechenden Glieder in (2.17) verschwinden also sowieso. Vgl. Anm. *) auf S. 60.

und \overline{e}_6^G die Gleichungen

$$\begin{aligned}\overline{c_{11}^* e_1^G} + \overline{c_{12}^* e_2^G} + \overline{c_{16}^* e_6^G} &= \overline{c_{11}^* e_1^Q} + \overline{c_{12}^* e_2^Q} + \overline{c_{16}^* e_6^Q} \\ \overline{c_{21}^* e_1^G} + \overline{c_{22}^* e_2^G} + \overline{c_{26}^* e_6^G} &= \overline{c_{21}^* e_1^Q} + \overline{c_{22}^* e_2^Q} + \overline{c_{26}^* e_6^Q} \\ \overline{c_{61}^* e_1^G} + \overline{c_{62}^* e_2^G} + \overline{c_{66}^* e_6^G} &= \overline{c_{61}^* e_1^Q} + \overline{c_{62}^* e_2^Q} + \overline{c_{66}^* e_6^Q}\end{aligned}\quad (2.18)$$

aus welchen man die unbekannten Konstanten bestimmen kann. Einsetzen in (2.7) und (2.15) liefert die endgültige Lösung.

Natürlich sind die Beiwerte c_{ab}^* keine Konstanten des Kristallsystems, sondern hängen außerdem noch von der Lage des Koordinatensystems und insbesondere der mit der Schichtebennormale zusammenfallenden z -Achse ab. Auch für die Elastizitätskonstanten selbst darf man nur für besondere Lagen der z -Achse die tabulierten, auf ein Achsendreibein möglichst hoher Symmetrie im Kristall bezogenen Werte benutzen, andernfalls muß man sie, wie bei der Berechnung ebener Wellen im Kristall [8], auf ein passendes Koordinatensystem transformieren.

Als einfachste Beispiele werden die Formeln (2.15) für die Würfelebene im kubischen Kristall

$$\begin{aligned}\sigma_1^G &= \left(c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}}\right) e_1^E + c_{12} \left(1 - \frac{c_{12}}{c_{11}}\right) e_2^E \\ \sigma_2^G &= c_{12} \left(1 - \frac{c_{12}}{c_{11}}\right) e_1^E + \left(c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}}\right) e_2^E \\ \sigma_6^G &= c_{44} e_6^E\end{aligned}\quad (2.22)$$

und für den isotropen Körper

$$\begin{aligned}\sigma_1^G &= \frac{2G}{m-1} (m e_1^E + e_2^E) & (m = \text{Querkontraktionszahl,} \\ & & G = \text{Schubmodul}) \\ \sigma_2^G &= \frac{2G}{m-1} (e_1^E + m e_2^E) \\ \sigma_6^G &= G e_6^E = 2G \varepsilon_{xy}^E\end{aligned}\quad (2.23)$$

angeschrieben. Diese Formeln liegen mehr oder weniger implizit zahlreichen Arbeiten über die Wirkung der Magnetostriktion auf Energie und Dicke der Blochschen Wände zugrunde (vgl. z. B. [9] bis [12], [4]). Daß in diesen Fällen richtige Ergebnisse auch ohne ausdrückliche Verwendung der Eigenspannungstheorie erzielt werden konnten, liegt daran, daß hier infolge der besonderen Symmetrie im Kristall alle Gesamtdehnungskomponenten und nicht nur die in (2.4) genannten konstant sind, was die zitierten Autoren meist von vornherein vorausgesetzt haben [12]¹⁾. In Ebenen geringerer Symmetrie dagegen

¹⁾ In homogenem Material trifft dies dann zu, wenn σ_2^Q , σ_4^Q und σ_5^Q konstant sind, wie man durch Einsetzen von (1.1) und (2.3) in (1.2) erkennt.

ist diese Annahme falsch; die Konstanz gilt nach (2.4) nur noch für die Verzerrung der xy -Ebenen. Zwar ist der Fehler bei Anwendungen auf Blochsche Wände gering, so lange die Kristallenergie genügend groß ist, kann aber in Sonderfällen bei starker Magnetostriktion doch merklich werden. Die Spannung im Innern von 90° -Wänden läßt sich ohne die hier entwickelten Formeln erst recht nicht berechnen [13].

Eine andere Formel zur Berechnung der c_{ab}^* ergibt sich aus der Umkehrung des aus (2.3) folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned} e_1^E &= s_{11}\sigma_1^G + s_{12}\sigma_2^G + s_{16}\sigma_6^G \\ e_2^E &= s_{21}\sigma_1^G + s_{22}\sigma_2^G + s_{26}\sigma_6^G \\ e_6^E &= s_{61}\sigma_1^G + s_{62}\sigma_2^G + s_{66}\sigma_6^G \end{aligned} \quad (2.24)$$

Man erhält die von Voigt [5] für die Behandlung kristalliner Platten angegebenen Beziehungen

$$\begin{aligned} c_{11}^* &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} s_{22} & s_{26} \\ s_{62} & s_{66} \end{vmatrix} ; & c_{12}^* &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} s_{62} & s_{66} \\ s_{12} & s_{16} \end{vmatrix} = c_{21}^* \\ c_{22}^* &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{16} \\ s_{61} & s_{66} \end{vmatrix} ; & c_{16}^* &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} s_{12} & s_{16} \\ s_{22} & s_{26} \end{vmatrix} = c_{61}^* \\ c_{66}^* &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} ; & c_{26}^* &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} s_{16} & s_{11} \\ s_{26} & s_{21} \end{vmatrix} = c_{62}^* \end{aligned} \quad (2.25)$$

mit

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{26} \\ s_{61} & s_{62} & s_{66} \end{vmatrix} \quad (2.26)$$

In der Tat handelt es sich nach (2.3) hier wie bei Voigt um ebene Spannungszustände. (2.25) dürfte in Kristallen niedriger Symmetrie sogar für die numerische Berechnung günstiger sein als (2.16), und ebenso dort, wo man einfache Formeln für die übrigen Komponenten e_3^E, e_4^E, e_5^E der elastischen Dehnung benötigt. Dagegen gestattet (2.25) keinen unmittelbaren Vergleich mit den Elastizitätskonstanten c_{ab} , während in (2.16) die Differenz zwischen c_{ab} und c_{ab}^* unmittelbar zum Ausdruck kommt.

3. Die magnetostriktive Extradehnung

Da die Magnetostriktion eines ferromagnetischen Einkristalls vom Richtungssinn der Magnetisierung nicht abhängt [15], kann der Tensor der magnetostriktiven Extradehnung ε_{ij}^M als Reihenentwicklung nach Produkten geradzahligter Ordnung in den Richtungs cosinus $\alpha_i = \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ des Magnetisierungsvektors angeschrieben werden. Begnügt man sich mit den Gliedern 2. Ordnung¹⁾,

¹⁾ Glieder höherer Ordnung sind zwar bei einigen Materialien bekannt; die bei den vorliegenden Problemen sinnvolle Genauigkeit rechtfertigt aber nicht den mit ihrer Berücksichtigung verbundenen Aufwand. Dagegen ist von einer — in Kristallen ohne Symmetriezentrum prinzipiell möglichen — vom Richtungssinn abhängigen „Magnetostriktion 1. Ordnung“ bisher nichts nachgewiesen worden, im Gegensatz zu dem analogen Effekt der Elektrostriktion (piezoelektrischer Effekt).

so kann man die Produkte der Richtungscosinus zu einem Tensor $\alpha_i \alpha_j$ zusammenfassen, aus dem sich durch Multiplikation mit dem Tensor λ_{ijkl} der Magnetostruktionskonstanten die magnetostriktive Extradehnung

$$\varepsilon_{ij}^M = \lambda_{ijkl} \alpha_k \alpha_l \quad (3.1)$$

in ähnlicher Weise ergibt wie nach dem *Hookeschen* Gesetz die elastische Dehnung aus der Gesamtspannung. Genau wie in der Elastizitätstheorie folgt hier aus der Symmetrie der Tensoren ε_{ij}^M und $\alpha_i \alpha_j$ die Symmetrie von λ_{ijkl} bezüglich eines Indexpaares ij bzw. kl für sich; wie dort kann man deshalb die Indexpaare zu *Voigtschen* Indizes zusammenfassen und den Tensor $\alpha_i \alpha_j \equiv \widehat{\alpha \alpha}_{ij}$ ersetzen durch die Spaltenmatrix

$$(\widehat{\alpha \alpha}) = \begin{pmatrix} \alpha_x^2 \\ \alpha_y^2 \\ \alpha_z^2 \\ \alpha_y \alpha_z \\ \alpha_z \alpha_x \\ \alpha_x \alpha_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin^2 \Theta (1 + \cos 2\Phi) \\ \sin^2 \Theta (1 - \cos 2\Phi) \\ 2 \cos^2 \Theta \\ \sin 2\Theta \sin \Phi \\ \sin 2\Theta \cos \Phi \\ \sin^2 \Theta \sin 2\Phi \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Die zweite Form der Spaltenmatrix ergibt sich, wenn man die Richtungscosinus durch den Polarwinkel Θ des Magnetisierungsvektors mit der z -Achse und den Azimut Φ ausdrückt. (3.1) läßt sich nun schreiben:

$$e_a^M = \lambda_{ab} \widehat{\alpha \alpha}_b. \quad (3.3)$$

Allerdings kann hier im Gegensatz zum *Hookeschen* Gesetz die Symmetrie der Matrix λ_{ab} bezüglich a und b nicht mehr allgemein vorausgesetzt werden [16]; sie ist nur noch in Einzelfällen durch die Symmetrie des Kristallsystems bedingt und läßt sich z. B. im rhombischen System auf keine Weise mehr erreichen. Denn das Postulat, daß die magnetostriktive Energiedichte der freien Dehnung

$$w_{\text{frei}}^M = \frac{1}{2} \widehat{\alpha \alpha}_a \widehat{\alpha \alpha}_b \lambda_{ca} \lambda_{db} c_{cd} \quad (3.4)$$

eine Zustandsgröße sein soll, führt zwar notwendig auf die Symmetrie der zusammengesetzten Matrix $\lambda_{ca} \lambda_{db} c_{cd}$ bezüglich der Indizes a und b ; diese ist aber mit der Symmetrie von c_{cd} bezüglich c und d bereits gewährleistet und hat mit der Symmetrie von λ_{ab} überhaupt nichts zu tun. Dagegen ergibt sich eine Vereinfachungsmöglichkeit aus der identischen Beziehung

$$\alpha_i \alpha_i = \sum_{a=1}^3 \widehat{\alpha \alpha}_a = 1 \quad (3.5)$$

Sie bedeutet, daß die Matrix

$$(\lambda_{ab}^0) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^0 & \lambda_{11}^0 & \lambda_{11}^0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21}^0 & \lambda_{21}^0 & \lambda_{21}^0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{31}^0 & \lambda_{31}^0 & \lambda_{31}^0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{41}^0 & \lambda_{41}^0 & \lambda_{41}^0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{51}^0 & \lambda_{51}^0 & \lambda_{51}^0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{61}^0 & \lambda_{61}^0 & \lambda_{61}^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

mit beliebigen $\lambda_{11}^0, \lambda_{21}^0, \dots, \lambda_{61}^0$

zur magnetostriktiven Extradehnung weiter nichts beiträgt als eine physikalisch bedeutungslose, von den α_i unabhängige Konstante. Daher kann man die Matrix der Magnetostriktionskonstanten zuweilen durch geeignete Verfügung über die λ_{a1}^0 vereinfachen; im hexagonalen Fall z. B. läßt sich damit die Symmetrie erzwingen. Die Transformation der Magnetostriktionskonstanten λ_{ab} erfolgt unabhängig von den Symmetrieverhältnissen genauso wie bei den Elastizitätskoeffizienten s_{ab} , denn die Größen $\widehat{\alpha}\alpha_a$ sind wie die Spannungskomponenten σ_a gleich den entsprechenden Tensorkomponenten, während auf der linken Seite von (3.3) wie in der zweiten Formel von (2.2) eine Dehnungsmatrix steht, deren drei letzte Elemente gleich dem Doppelten der entsprechenden Tensorkomponenten sind.

Die Matrix der Magnetostriktionskonstanten verschafft man sich für die praktische Rechnung am leichtesten durch eine Rückübersetzung der in der Literatur [15], [16] angegebenen Magnetostriktionsformeln in die Matrixform; sie sind dort im Hinblick auf die Messungen meist als skalare Ausdrücke für die Verlängerung $\frac{\delta l}{l}$ in einer vorgegebenen Meßrichtung mit den Richtungs-cosinus β_i angegeben, wobei die Konstanten oft noch in einer für die experimentelle Bestimmung zweckmäßigen Weise zusammengefaßt sind. Man bringt sie durch Umordnen auf die Form

$$\frac{\delta l}{l} = \beta_i \beta_j \lambda_{ijkl} \alpha_k \alpha_l = \lambda_{ab} \beta \widehat{\beta}_a \widehat{\alpha}_b, \quad (3.7)$$

aus der sich die λ_{ab} unmittelbar ablesen lassen, und vereinfacht gegebenenfalls noch mit Hilfe von (3.6). Will man schließlich die α_i nicht auf das ausgezeichnete Dreibein des Kristalls, sondern auf ein Koordinatensystem mit der Wandnormale als z-Achse beziehen, so hat man i. allg. die Matrix λ_{ab} noch auf dieselben Achsen wie c_{ab} zu transformieren.

Als Beispiele seien noch die Matrizen der Magnetostriktionskonstanten für das kubische und das hexagonale System angeschrieben, in denen die wichtigsten ferromagnetischen Elemente Eisen, Nickel und Kobalt kristallisieren. Für das kubische System erhält man mit den üblichen Bezeichnungen [9] bis [16] und der üblichen Zusatzbedingung, nach der die in dieser Näherung konstante Volumenmagnetostriktion verschwinden soll, mit den Würfelkanten als Achsen

$$(\lambda_{ab}) = \begin{bmatrix} \lambda_{100} - \frac{1}{2} \lambda_{100} - \frac{1}{2} \lambda_{100} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \lambda_{100} & \lambda_{100} - \frac{1}{2} \lambda_{100} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \lambda_{10} & -\frac{1}{2} \lambda_{100} & \lambda_{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \lambda_{111} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \lambda_{111} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \lambda_{111} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Im hexagonalen System, wo die Volumenmagnetostriktion auch in zweiter Näherung nicht mehr konstant ist, findet man nach [15] und [16] mit Hilfe von (3.6) für die z-Achse als sechszählige Achse

$$(\lambda_{ab}) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(\lambda_{11} - \lambda_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Die Ebenen senkrecht zur sechszähligen Achse sind in dieser Näherung quasi-isotrop. Mit den Bezeichnungen von *Lee* [15] sind die Konstanten in (3.9)

$$\lambda_{11} = k_2; \quad \lambda_{12} = k_3; \quad \lambda_{33} = k_1; \quad \lambda_{44} = 2 k_4 \quad (3.10)$$

und mit den Bezeichnungen von *Mason* [16]

$$\lambda_{11} = \lambda_A; \quad \lambda_{12} = \lambda_B; \quad \lambda_{33} = -\lambda_C; \quad \lambda_{44} = 4 \lambda_D - (\lambda_A + \lambda_C) \quad (3.11)$$

4. Zur Transformation der Elastizitäts- und Magnetostruktionskonstanten

Die Transformationsformeln für c_{ab} und s_{ab} erscheinen bei *Voigt* [5] derart umfänglich und kompliziert, daß *Mühly* [8] empfiehlt, vor der Transformation die Matrizen zunächst einmal in Tensoren 4. Stufe umzuschreiben und dann die entsprechenden Transformationsformeln anzuwenden. Verzichtet man indessen darauf, die ganze Transformation in einem Schritt durchzuführen, so lassen sich unter Benutzung der praktisch meist leicht auffindbaren *Eulerschen* Winkel [18] Rechenverfahren angeben, die eine unmittelbare Transformation der *Voigtschen* Matrizen mit mäßigem Rechenaufwand gestatten. Sie bestehen in bis zu dreimaliger Drehung um eine Achse [5] (z. B. z-Achse), Achsenvertauschungen und Richtungswechseln einzelner Achsen.

Die einfachste dieser Operationen ist die Achsenvertauschung; bei einer Vertauschung der Achsen x, y, z werden die Zeilen und Spalten nacheinander nach folgendem Schema ausgetauscht:

$$\begin{array}{lcl} y/z: & - & 2//3 \quad 3//2 \quad - \quad 5//6 \quad 6//5 \\ z/x: & 1//3 & - \quad 3//1 \quad 4//6 \quad - \quad 6//4 \\ x/y: & 1//2 & 2//1 \quad - \quad 4//5 \quad 5//4 \quad - \end{array} \quad (4.1)$$

Wechselt die Richtung einzelner Achsen und das Vorzeichen der entsprechenden Koordinaten, so kehrt sich an den im nächsten Schema durch ein Kreuz bezeichneten Stellen der Matrix das Vorzeichen um, während die übrigen Elemente unverändert bleiben. Schreibt man die zugehörigen Vorzeichenwechsel der Koordinaten darüber, so hat man die Anordnung:

$$\begin{array}{ccc}
 x// -x \text{ oder} & y// -y \text{ oder} & z// -z \text{ oder} \\
 y, z// -y, -z & z, x// -z, -x & x, y// -x, -y
 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\
 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\
 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\
 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\
 + & + & + & + & 0 & 0 \\
 + & + & + & + & 0 & 0
 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & + & 0 & + \\
 0 & 0 & 0 & + & 0 & + \\
 0 & 0 & 0 & + & 0 & + \\
 + & + & + & 0 & + & 0 \\
 0 & 0 & 0 & + & 0 & + \\
 + & + & + & 0 & + & 0
 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & + & + & 0 \\
 0 & 0 & 0 & + & + & 0 \\
 0 & 0 & 0 & + & + & 0 \\
 + & + & + & 0 & 0 & + \\
 + & + & + & 0 & 0 & + \\
 0 & 0 & 0 & + & + & 0
 \end{array} \right) \quad (4.2)$$

Die Drehung des Koordinatensystems um die z -Achse mit dem Drehwinkel Φ_0 schließlich bewirken für c_{ab} die Matrix $C_{ab}(\Phi_0)$ und für s_{ab} sowie λ_{ab} die Matrix $S_{ab}(\Phi_0)$ nach den Gleichungen

$$c'_{ab} = C_{ac}(\Phi_0) C_{ba}(\Phi_0) c_{cd} \quad (4.3)$$

$$s'_{ab} = S_{ac}(\Phi_0) S_{ba}(\Phi_0) s_{cd} \quad (4.4)$$

mit

$$(C_{ab}(\Phi_0)) = \begin{pmatrix} \cos^2 \Phi_0 & \sin^2 \Phi_0 & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \Phi_0 \cos \Phi_0 \\ \sin^2 \Phi_0 & \cos^2 \Phi_0 & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \Phi_0 \cos \Phi_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Phi_0 & -\sin \Phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \Phi_0 & \cos \Phi_0 & 0 \\ -\sin \Phi_0 \cos \Phi_0 & \sin \Phi_0 \cos \Phi_0 & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \Phi_0 - \sin^2 \Phi_0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

und

$$(S_{ab}(\Phi_0)) = \begin{pmatrix} \cos^2 \Phi_0 & \sin^2 \Phi_0 & 0 & 0 & 0 & \sin \Phi_0 \cos \Phi_0 \\ \sin^2 \Phi_0 & \cos^2 \Phi_0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \Phi_0 \cos \Phi_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Phi_0 & -\sin \Phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \Phi_0 & \cos \Phi_0 & 0 \\ -2 \sin \Phi_0 \cos \Phi_0 & 2 \sin \Phi_0 \cos \Phi_0 & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \Phi_0 - \sin^2 \Phi_0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Die Transformation der Spannungsmatrix erfolgt durch

$$\sigma'_a = C_{ab}(\Phi_0) \sigma_b \quad (4.7)$$

und die der Dehnungsmatrix durch (vgl. die entsprechende Formel bei Love [17], S. 152, sowie Green und Zerna [20], (5.4.13))

$$e'_a = S_{ab}(\Phi_0) e_b \quad (4.7a)$$

Die Drehungsmatrizen $C_{ab}(\Phi_0)$ und $S_{ab}(\Phi_0)$ erfüllen die Identitäten

$$C_{ab}(\Phi_0) = S_{ba}(-\Phi_0) \quad (4.8)$$

und

$$C_{ac}(\Phi_0) S_{bc}(\Phi_0) = \delta_{ab} \quad \delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{für } a=b \\ 0 & \text{für } a \neq b \end{cases} \quad (4.8a)$$

Es sei noch bemerkt, daß der Vorzeichenwechsel der Matrixelemente nach (4.2) nichts mit Übergängen vom Rechts- zum Linkssystem zu tun hat, sondern nur mit der Lage relativ zu den Kristallachsen genügend niedriger Symmetrie. Tatsächlich entspricht nach (4.2) derselbe Vorzeichenwechsel jeweils einem Übergang, der den Schraubungssinn des Koordinatensystems umkehrt, und zugleich einem andern Übergang, der ihn unverändert läßt. Und in (4.1) vollzieht sich der Wechsel vom Rechts- zum Linkssystem ohne jede Vorzeichenänderung.

Die in dieser Arbeit benötigten Transformationen betreffen die Konstanten des kubischen Systems; als Schichtungsebenen treten die wichtigsten Ebenen Blochscher Wände auf, nämlich die $\{001\}$ -, $\{110\}$ - und $\{111\}$ -Ebenen (Abb. 1 bis 3). Es treten also ähnliche Transformationen auf, wie sie z. B. schon von

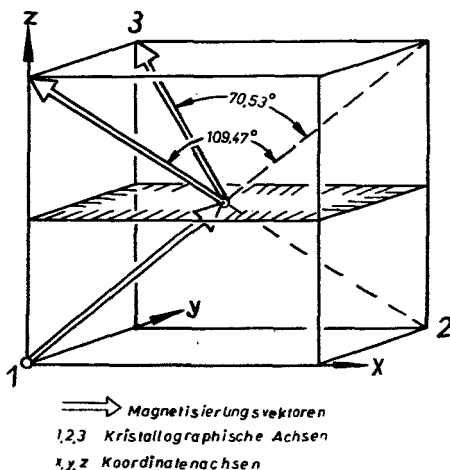


Abb. 1. Wandtypen (001) in Nickel.

Seeger und Schöck [19] für die Elastizitätskoeffizienten ausgeführt wurden. Die in dieser Arbeit teilweise abweichenden Vorzeichen rühren davon her, daß wir uns einerseits mit der letzten Formel (3.2) auf ein Rechtssystem festgelegt und im übrigen die Achsenlagen so weit als möglich der bisher gründlichsten Abhandlung über Blochsche Wände, nämlich der Lillieschen Arbeit [12] angepaßt haben. Wir bezeichnen als Aufstellung 0 die bekannte Form der Matrizen für die Würfelkanten als Achsen. Die Aufstellung I geht daraus durch Drehung um 45° um die z-Achse hervor; das zugehörige Schema entspricht

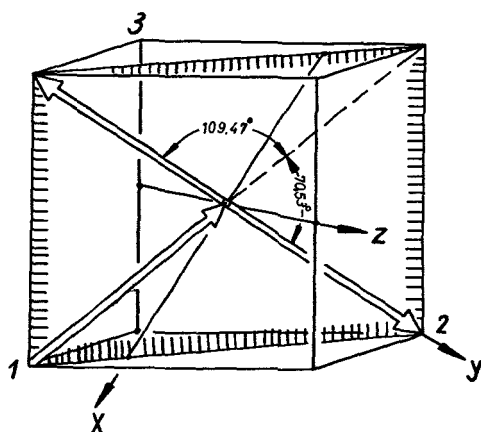


Abb. 2. Wandtypen (110) in Nickel. Bezeichnungen wie Abb. 1.

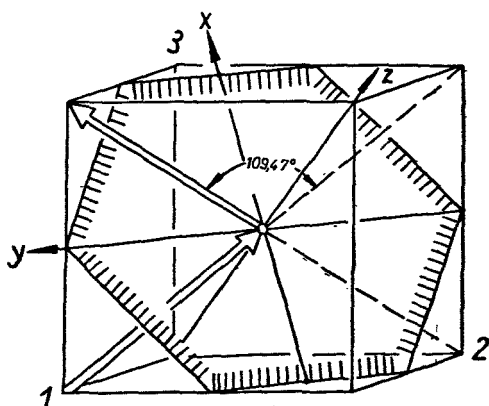


Abb. 3. Wandtyp (111) in Nickel. Bezeichnungen wie Abb. 1.

tetragonalen Symmetrie. Nun wird durch Vertauschung eine Flächendiagonale zur z-Achse gemacht und um den Winkel zwischen Raum- und Flächendiagonale

$$\eta = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} = 35,26^\circ \quad (4.9)$$

gedreht, wobei sich ein der trigonalen Symmetrie entsprechendes Schema ergibt. Durch Vertauschungen und Vorzeichenwechsel können die Aufstellungen I und II noch verändert und den jeweiligen Bedürfnissen angepaßt werden. Die in dieser Arbeit verwendeten Koordinatensysteme sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Aufstellung	x -Achse	y -Achse	z -Achse	vgl. Abb.	
0	[010]	$[\bar{1}00]$	[001]	1	
I	[00 $\bar{1}$]	$[\bar{1}10]$	[110]		
II'	[11 $\bar{2}$]	$[\bar{1}1\bar{1}]$	[110]	2	
II''	[1 $\bar{1}0$]	[111]	$[\bar{1}\bar{1}2]$		
II'''	$[\bar{1}\bar{1}2]$	[1 $\bar{1}0$]	[111]	3	(4.10)

Achsen und Aufstellungen werden im folgenden bei Bedarf noch als untere und obere Indizes an den Matrizen vermerkt. Die transformierten Matrizen haben für λ_{ab} und s_{ab} dieselbe Gestalt, da im kubischen System auch jene eine symmetrische Matrix bilden. Es genügt daher, die transformierten Matrizen λ_{ab} anzuschreiben; lediglich die Berechnung der einzelnen Elemente ist für λ_{ab} wegen der geringeren Zahl der Konstanten etwas einfacher als für s_{ab} . Für die Aufstellung I folgen z. B. mit

$$s_{22}^I = \frac{1}{2} s_{11} + \frac{1}{2} s_{12} + \frac{1}{4} s_{44} ; \quad s_{23}^I = \frac{1}{2} s_{11} + \frac{1}{2} s_{12} - \frac{1}{4} s_{44} \quad (4.11)$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{100} ; \quad \lambda_{12} = -\frac{1}{2} \lambda_{100} ; \quad \lambda_{44} = 3 \lambda_{111} ; \quad \lambda_{22}^I = \frac{1}{4} \lambda_{100} + \frac{3}{4} \lambda_{111} ;$$

$$\lambda_{23}^I = \frac{1}{4} \lambda_{100} - \frac{3}{4} \lambda_{111} \quad (4.12)$$

$$c_{22}^I = \frac{1}{2} c_{11} + \frac{1}{2} c_{12} + c_{44} ; \quad c_{23}^I = \frac{1}{2} c_{11} + \frac{1}{2} c_{12} - c_{44} \quad (4.13)$$

die Matrizen

$$(c_{ab})_{[00\bar{1}][\bar{1}10][110]}^I = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^I & c_{23}^I & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{22}^I & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}c_{11} - \frac{1}{2}c_{12} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & c_{44} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$(\lambda_{ab})_{[00\bar{1}][\bar{1}10][110]}^I = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda_{22}^I & \lambda_{23}^I & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda_{22}^I & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\lambda_{11} - 2\lambda_{12} & 0 & 0 \\ & & & & \lambda_{44} & 0 \\ & & & & & \lambda_{44} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

und daraus, ausgedrückt in den Richtungswinkeln der Magnetisierung nach (3.2), die magnetostriktive Extradehnung

$$(e_a^M)^I_{[00\bar{1}][110][110]} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} \lambda_{100} \left\{ \sin^2 \Theta \left(\frac{1}{3} + \cos 2\Phi \right) - \frac{2}{3} \cos^2 \Theta \right\} \\ \lambda_{100} \left\{ -\sin^2 \Theta \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cos 2\Phi \right) + \frac{1}{3} \cos^2 \Theta \right\} + \\ + \lambda_{111} \left\{ \sin^2 \Theta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\Phi \right) - \cos^2 \Theta \right\} \\ \lambda_{100} \left\{ -\sin^2 \Theta \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cos 2\Phi \right) + \frac{1}{3} \cos^2 \Theta \right\} - \\ - \lambda_{111} \left\{ \sin^2 \Theta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\Phi \right) - \cos^2 \Theta \right\} \\ 2 \lambda_{100} \sin 2\Theta \sin \Phi \\ 2 \lambda_{111} \sin 2\Theta \cos \Phi \\ 2 \lambda_{111} \sin^2 \Theta \sin 2\Phi \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

sowie die Beiwerte zur Berechnung der Gesamtspannung im geschichteten Medium nach (2.15)

$$\begin{aligned} c_{11}^{*I} &= c_{11} - \frac{2c_{12}^2}{c_{11} + c_{12} + 2c_{44}} ; \quad c_{12}^{*I} = \frac{4c_{12}c_{44}}{c_{11} + c_{12} + 2c_{44}} \\ c_{22}^{*I} &= \frac{4c_{44}(c_{11} + c_{12})}{c_{11} + c_{12} + 2c_{44}} ; \quad c_{66}^{*I} = c_{44} \\ c_{16}^{*I} &= c_{26}^{*I} = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Schließlich seien noch die Resultate für die Aufstellungen II', II'' und II''' angegeben. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} s'_{11} &= s''_{11} = s'''_{11} = \frac{1}{2} s_{11} + \frac{1}{2} s_{12} + \frac{1}{4} s_{44} ; \quad s'_{44} = s''_{44} = s'''_{44} = \frac{4}{3} s_{11} - \frac{4}{3} s_{12} + \frac{1}{3} s_{44} \\ s'_{22} &= s''_{22} = s'''_{33} = \frac{1}{3} s_{11} + \frac{2}{3} s_{12} + \frac{1}{3} s_{44} ; \quad s'_{55} = s''_{55} = s'''_{66} = \frac{2}{3} s_{11} - \frac{2}{3} s_{12} + \frac{2}{3} s_{44} \\ s'_{12} &= s''_{12} = s'''_{13} = \frac{1}{3} s_{11} + \frac{2}{3} s_{12} - \frac{1}{6} s_{44} ; \quad s'_{16} = s'_{34} = s'_{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} s_{11} - \frac{\sqrt{2}}{3} s_{12} - \frac{\sqrt{2}}{6} s_{44} \\ s'_{13} &= s'_{13} = s'_{12} = \frac{1}{6} s_{11} + \frac{5}{6} s_{12} - \frac{1}{12} s_{44} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \lambda'_{11} &= \lambda''_{11} = \lambda'''_{11} = \frac{1}{4} \lambda_{100} + \frac{3}{4} \lambda_{111} ; \quad \lambda'_{44} = \lambda''_{44} = \lambda'''_{44} = 2 \lambda_{100} + \lambda_{111} \\ \lambda'_{22} &= \lambda''_{22} = \lambda'''_{33} = \lambda_{111} ; \quad \lambda'_{55} = \lambda''_{55} = \lambda'''_{66} = \lambda_{100} + 2 \lambda_{111} \\ \lambda'_{12} &= \lambda''_{12} = \lambda'''_{13} = -\frac{1}{2} \lambda_{111} ; \quad \lambda'_{16} = \lambda'_{34} = \lambda'_{15} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{100} - \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{111} \\ \lambda'_{13} &= \lambda'_{13} = \lambda'_{12} = -\frac{1}{4} \lambda_{100} - \frac{1}{4} \lambda_{111} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}
c'_{11} = c''_{11} = c'''_{11} &= \frac{1}{2} c_{11} + \frac{1}{2} c_{12} + c_{44} ; c'_{44} = c''_{44} = c'''_{44} = \frac{1}{3} c_{11} - \frac{1}{3} c_{12} + \frac{1}{3} c_{44} \\
c'_{22} = c''_{22} = c'''_{22} &= \frac{1}{3} c_{11} + \frac{2}{3} c_{12} + \frac{4}{3} c_{44} ; c'_{55} = c''_{55} = c'''_{55} = \frac{1}{6} c_{11} - \frac{1}{6} c_{12} + \frac{2}{3} c_{44} \\
c'_{12} = c''_{12} = c'''_{12} &= \frac{1}{3} c_{11} + \frac{2}{3} c_{12} - \frac{2}{3} c_{44} ; c'_{16} = c''_{34} = c'''_{15} = \frac{\sqrt{2}}{6} c_{11} - \frac{\sqrt{2}}{6} c_{12} - \frac{\sqrt{2}}{3} c_{44} \\
c'_{13} = c''_{13} = c'''_{13} &= \frac{1}{6} c_{11} + \frac{5}{6} c_{11} - \frac{1}{3} c_{44}
\end{aligned} \quad (4.20)$$

werden die transformierten Matrizen

für die Magnetostruktionskonstanten in Aufstellung II'

$$(\lambda_{ab})_{[1\bar{1}\bar{2}][11\bar{1}][110]}^{\text{II}'} = \begin{pmatrix} \lambda'_{11} & \lambda'_{12} & \lambda'_{13} & 0 & 0 & \lambda'_{16} \\ & \lambda'_{22} & \lambda'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda'_{11} & 0 & 0 & -\lambda'_{16} \\ & & & \lambda'_{44} & -2\lambda'_{16} & 0 \\ & & & & \lambda'_{55} & 0 \\ & & & & & \lambda'_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

in Aufstellung II''

$$(\lambda_{ab})_{[1\bar{1}0][111][1\bar{1}2]}^{\text{II}''} = \begin{pmatrix} \lambda''_{11} & \lambda''_{12} & \lambda''_{13} & -\lambda''_{34} & 0 & 0 \\ & \lambda''_{22} & \lambda''_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda''_{11} & \lambda''_{34} & 0 & 0 \\ & & & \lambda''_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \lambda''_{55} & -2\lambda''_{34} \\ & & & & & \lambda''_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

in Aufstellung II'''

$$(\lambda_{ab})_{[1\bar{1}2][1\bar{1}0][111]}^{\text{II}'''} = \begin{pmatrix} \lambda'''_{11} & \lambda'''_{12} & \lambda'''_{13} & 0 & \lambda'''_{15} & 0 \\ & \lambda'''_{11} & \lambda'''_{13} & 0 & -\lambda'''_{15} & 0 \\ & & \lambda'''_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \lambda'''_{44} & 0 & -2\lambda'''_{15} \\ & & & & \lambda'''_{44} & 0 \\ & & & & & \lambda'''_{55} \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

und für die Elastizitätskonstanten

in Aufstellung II'

$$(c_{ab})_{[\bar{1}\bar{1}\bar{2}][\bar{1}\bar{1}\bar{1}][110]}^{II'} = \begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} & 0 & 0 & c'_{16} \\ & c'_{22} & c'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c'_{11} & 0 & 0 & -c'_{16} \\ & & & c'_{44} & -c'_{16} & 0 \\ & & & & c'_{55} & 0 \\ & & & & & c'_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

in Aufstellung II''

$$(c_{ab})_{[\bar{1}\bar{1}0][111][\bar{1}\bar{1}2]}^{II''} = \begin{pmatrix} c''_{11} & c''_{12} & c''_{13} & -c''_{34} & 0 & 0 \\ & c''_{22} & c''_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c''_{11} & c''_{31} & 0 & 0 \\ & & & c''_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c''_{55} & -c''_{34} \\ & & & & & c''_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

in Aufstellung II'''

$$(c_{ab})_{[\bar{1}\bar{1}2][\bar{1}\bar{1}0][111]}^{II'''} = \begin{pmatrix} c'''_{11} & c'''_{12} & c'''_{13} & 0 & c'''_{15} & 0 \\ & c'''_{11} & c'''_{13} & 0 & -c'''_{15} & 0 \\ & & c'''_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c'''_{44} & 0 & -c'''_{15} \\ & & & & c'''_{44} & 0 \\ & & & & & c'''_{55} \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Daraus ergeben sich nach (2.16) die Beiwerte zur Berechnung der Gesamtspannung nach (2.15) im senkrecht zur z -Achse geschichteten Medium

für Aufstellung II'

$$\begin{aligned} c_{11}^{*'} &= c'_{11} - \frac{c'^2_{13}}{c'_{11}}; & c_{22}^{*'} &= c'_{22} - \frac{c'^2_{12}}{c'_{11}} \\ c_{12}^{*'} &= c'_{12} \left(1 - \frac{c'_{13}}{c'_{11}} \right); & c_{26}^{*'} &= \frac{c'_{12} c'_{16}}{c'_{11}} \\ c_{16}^{*'} &= c'_{16} \left(1 + \frac{c'_{13}}{c'_{11}} \right); & c_{66}^{*'} &= c'_{44} - \frac{c'^2_{16}}{c'_{11}}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

für Aufstellung II''

$$\begin{aligned}
 c_{11}^{*''} &= c_{11}'' - \frac{c_{34}''^2 (2c_{13}'' + c_{11}'') + c_{44}'' c_{13}''^2}{c_{11}'' c_{44}'' - c_{34}''^2} ; & c_{22}^{*''} &= c_{22}'' - \frac{c_{13}''^2 c_{44}''}{c_{11}'' c_{44}'' - c_{34}''^2} \\
 c_{12}^{*''} &= c_{12}'' - \frac{c_{12}'' (c_{34}''^2 + c_{13}'' c_{44}'')}{c_{11}'' c_{44}'' - c_{34}''^2} ; & c_{26}^{*''} &= 0 \\
 c_{16}^{*''} &= 0 ; & c_{66}^{*''} &= c_{44}'' - \frac{c_{34}''^2}{c_{55}''} .
 \end{aligned} \quad (4.28)$$

für Aufstellung II'''

$$\begin{aligned}
 c_{11}^{*'''} &= c_{22}^{*'''} = c_{11}''' - \frac{c_{44}''' c_{13}'''^2 + c_{33}''' c_{15}'''^2}{c_{33}''' c_{44}'''} \\
 c_{12}^{*'''} &= c_{12}''' - \frac{c_{44}''' c_{13}'''^2 - c_{33}''' c_{15}'''^2}{c_{33}''' c_{44}'''} \\
 c_{16}^{*'''} &= c_{26}^{*'''} = 0 ; & c_{66}^{*'''} &= c_{66}''' - \frac{c_{15}'''^2}{c_{44}'''} .
 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Im hexagonalen System liefern Schichtungsebenen senkrecht zur hexagonalen Achse kein vom isotropen Fall wesentlich verschiedenes Ergebnis; interessant sind dagegen Lagen, in denen sie die hexagonale Achse enthalten ($[z] \perp [0001]$). Die zugehörige Matrix der Elastizitätskonstanten ergibt sich durch einfache Vertauschung nach (4.1) aus dem in der Literatur angegebenen Schema [5], [17]; die Indizes in den folgenden Formeln beziehen sich auf diese *Hauptorientierung*. Man erhält die Beiwerte zur Spannungsberechnung nach (2.15) für die hexagonale Achse in der Schichtungsebene zu

$$\begin{aligned}
 c_{11}^{*(h \perp)} &= c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} ; & c_{22}^{*(h \perp)} &= c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \\
 c_{12}^{*(h \perp)} &= c_{13} - \frac{c_{12} c_{13}}{c_{11}} ; & c_{26}^{*(h \perp)} &= 0 \\
 c_{16}^{*(h \perp)} &= 0 ; & c_{66}^{*(h \perp)} &= c_{44} .
 \end{aligned} \quad (4.30)$$

5. Magnetostriktive Eigenspannungen in *Bloch*schen Wänden und *Weiss*schen Bezirken

Das Kennzeichen des ferromagnetischen Zustandes ist bekanntlich, daß die Magnetisierung im ganzen Material ständig denselben Wert, die *Sättigungsmagnetisierung* J_s , besitzt; das pauschal unmagnetische Verhalten etwa eines Weicheisenstücks rührt her von der feinen (10^{-4} – 10^{-2} cm) Unterteilung in *Weiss*sche Bezirke, d. h. Bereiche verschiedener Magnetisierungsrichtung. Die meist sehr starke, durch die als Funktion der Richtung angegebene *Kristallenergie* gemessene Bevorzugung bestimmter kristallographischer Richtungen

bewirkt, daß sich die Magnetisierung innerhalb der einzelnen Bezirke praktisch homogen ausrichtet; im kubischen Eisenkristall sind z. B. die Würfelkanten bevorzugt, in Nickel die Raumdiagonale und im hexagonalen Kobalt die sechszählige Achse. Immerhin gibt es wichtige Fälle verschwindender oder fast verschwindender Kristallenergie (Nickel bei 200°C , Permalloy usw.). Die Übergangsgebiete zwischen den Weisschen Bezirken nehmen selten viel Raum ein (10^{-6} — 10^{-5} cm); da sich die Magnetisierung in ihnen aus der *leichten Richtung* herausdrehen muß, verhindert die Kristallenergie die stärkere Ausweitung dieser Blochschcn Wände, und bei verschwindender Kristallenergie wirken die infolge der Veränderlichkeit der Magnetostriktion im Übergangsgebiet entstehenden Eigenspannungen im selben Sinne. Diese magnetostriktiven Eigenspannungen sind der Gegenstand dieses Paragraphen. Die Ausartung der Blochschcn Wand zu einem schroffen, völlig unvermittelten Übergang verhindert die den ferromagnetischen Erscheinungen zugrunde liegende quantenmechanische Austauschkopplung, welche die Magnetisierung möglichst weitgehend parallel zu richten sucht; die Berechnung der Wandenergie und der Wandweite besteht also im wesentlichen in der Aufstellung einer Energiebilanz zwischen ausweitenden und zusammenziehenden „Kräften“ [9] bis [14]. Die Energie magnetischer Felder spielt dabei noch insofern eine Rolle, als der Winkel θ mit der Wandnormalen sich nirgends ändern darf; andernfalls treten sofort relativ energiereiche magnetische Streufelder auf¹⁾. Durch diese Bedingung werden auch die möglichen Wandebenen auf bestimmte Zonen im Kristall beschränkt [12]; aus diesen ∞^1 Möglichkeiten sollen hier nur einige der wichtigsten Einzelfälle herausgegriffen und die Resultate angegeben werden.

Unter den Bereichstrukturen, die im Polykristall sehr verwickelte und unübersichtliche Formen annehmen können, betrachten wir nur die einfachsten, wie sie in großen, sehr fehlerfreien und in bestimmten kristallographischen Ebenen geschnittenen Einkristallen im Innern auftreten ([10], [14]; dort weitere Literatur); sie bestehen in einer gleichmäßigen Aufeinanderfolge gleich dicker, plattenförmiger und in ihrer Ebene unendlich weit ausgedehnter Weisscher Bezirke, wobei die Magnetisierungsrichtung vom einen zum andern Bereich zwischen zwei leichten Richtungen abwechselt. Die Dicke der Wände kann dann gegenüber der Dicke der Bezirke vernachlässigt werden, und als Mittelwert der Gesamtdehnung erhält man nach (2.6) einfach den Mittelwert der Extradehnung in den Weisschen Bezirken, was die Anwendung auf die Berechnung von Wandenergie und Wandweite sehr erleichtert. Denn die Extradehnung ist dabei zunächst keineswegs bekannt; sie hängt bei konstantem θ nach (3.2) immer noch vom Azimut ϕ ab, und ϕ soll nun so variiert werden, daß die Summe aller beteiligten Energieterme je Flächeneinheit der Wand ein Minimum wird [9], [10], [12], [14]; man hätte also im allgemeinen Fall mit unbestimmtem \bar{e}_a^G in die Variationsrechnung einzugehen. Da nun aber die wesentlichen Komponenten e_1^G , e_2^G und e_6^G bereits durch die Weisschen Bezirke selbst bestimmt sind, so kann die elastische Dehnung, die Gesamtspannung und damit die inkompatible Energiedichte wie alle anderen Energieterme als

¹⁾ Auf Ausnahmen im Fall hoher Kristallenergie und niedriger Sättigungsmagnetisierung hat neuerdings Kaczér [30] aufmerksam gemacht.

Funktion des Azimuts Φ am Orte selbst angegeben werden und geht damit einfach als Zusatzglied zur Kristallenergie in die Rechnung ein [12]. Man hat also nur in den Formeln von *Lilley* [12] die Konstanten entsprechend abzuändern¹⁾.

Die *Blochschen* Wände können nach ihrem Eigenspannungsverhalten in zwei Gruppen eingeteilt werden, je nachdem, ob im Innern der anschließenden *Weisschen* Bezirke noch eine Gesamtspannung resultiert, oder ob sie dort verschwindet und nur in den Wänden selbst von Null verschiedene Werte annimmt. Mit der ersten Gruppe, deren bekanntestes Beispiel die (001)–90°-Wand des Eisens ist, haben sich vor allem *Becker* und *Döring* [9] beschäftigt. In einem Kristall, der noch andere als magnetostriktive Eigenspannungsquellen enthält, suchen sich die meist leichter beweglichen *Blochschen* Wände so anzuordnen, daß die Summe aller Eigenspannungen möglichst klein wird. Da sich nun diese Wechselwirkung bei den Wänden der ersten Gruppe über das ganze Bereichsvolumen erstreckt, darf man schließen, daß sie schon durch relativ geringe Eigenspannungen mit großer Kraft festgehalten werden. Gittergeometrisch entsprechen diese Wände einer flächenhaften Verteilung von Quasi-Versetzungen [1, 4, 7], deren Eigenspannungen sich u. U. wenigstens makroskopisch gegen die einer ähnlichen Anordnung echter *plastischer* Versetzungen umgekehrten Vorzeichens wegheben können; ein Beispiel wird hier noch ausgeführt. Auf die Folgerungen für die Theorie der Magnetisierungskurve soll an anderer Stelle eingegangen werden [21].

Die zweite Gruppe, deren Eigenspannungen sich auf die Wände selbst beschränken, ist demnach im gestörten Kristall entsprechend leichter beweglich und bestimmt nach den Theorien von *Kersten* [22], *Néel* [23] und *Vicena* [31] Anfangspermeabilität und Koerzitivkraft in weichem Material. Zu dieser Gruppe gehören vor allem die 180°-Wände, bei denen die Magnetisierung in den benachbarten Bezirken entgegengesetzt gerichtet ist, aber auch Wände kleineren Winkels, besonders solche, wo bei entsprechender Kristallsymmetrie die beiden Magnetisierungsvektoren sich auf dieselbe Gerade in der Wandebene projizieren. Und schließlich würden sämtliche *Blochschen* Wände zur zweiten Gruppe übergehen für ein Material, in dem die für die Spannung im Bereichsinnern allein maßgebende magnetostriktive Extradehnung der leichten Richtung verschwindet. Ein Nulldurchgang der zugehörigen Magnetostruktionskonstanten in ihrem — häufig sehr stark ausgeprägtem — Temperaturverlauf müßte sich demnach deutlich in Anfangspermeabilität und Koerzitivkraft ausdrücken.

Der genaue Verlauf der magnetostriktiven Eigenspannungen in der Wand selbst ist also — mit den erwähnten Ausnahmen verschwindender Kristall-

¹⁾ Aus dieser Konstanz der wesentlichen Komponenten von e_a^g folgt auch das Verschwinden des zweiten Gliedes von (1.16) bei irgendwelchen Drehungen der Magnetisierung in der Wand. Die gesamte Anisotropie-Energie der Magnetisierung läßt sich entweder ausdrücken als Summe der (i. allg. unmittelbar aus den Messungen zu gewinnenden) Kristallenergie bei freier Dehnung und der inkompatiblen Energie oder als Differenz der Kristallenergie bei starrer Einspannung und der kompatiblen Energie [9], [10]. Dies folgt z. B. aus einem Gedankenversuch, bei dem man zunächst eine aus der Wand herausgeschnittene infinitesimale Schicht sich bei festgehaltener Magnetisierung frei dehnen und danach die Magnetisierung in eine leichte Richtung eindrehen läßt [21].

energie und verschwindender Magnetostraktion der leichten Richtung — für die Wände der ersten Gruppe von geringer Bedeutung; deshalb werden in Tab. (5.1) nur die Werte im Innern der Bereiche aufgeführt, was durch den oberen Index ∞ (d. h. „unendlich weit“ von der nächsten Wand) im Kopf der Tabelle angedeutet wird¹⁾. Dagegen läßt sich in Tabelle (5.2) das Ausschreiben der teilweise recht umständlichen Formeln für die Abhängigkeit der Eigenspannungsgrößen vom Magnetisierungsazimut nicht vermeiden; sie sind dort, wo sie nicht ganz verschwinden, stark veränderlich und dabei in einigen Wandtypen von entscheidender Wirkung auf die — für die Wechselwirkung mit anderen Eigenspannungsquellen wesentliche [4], [7], [21], [31] — Wandweite. Eine exakte Berechnung von Energie und Weite der (001)—109,47°-Wand in Nickel, die ohne Magnetostraktion gleich der (001)—180°-Wand in Eisen [9]—[12] und der (110)—180°-Wand in Nickel [12] in zwei weit auseinander liegende Teile zerfallen würde, wurde erst durch diese Formeln ermöglicht [13], während die exakte Berechnung für die (110)—180°-Wand des Nickels wegen der immer noch relativ hohen Kristallenergie nur eine unter 1,5% liegende und somit praktisch zu vernachlässigende Korrektur an den Werten von Lilley [12] ergab. Erst recht bedeutungslos war die Korrektur bei Eisen. Ein wesentlicher Einfluß des genauen Eigenspannungsverlaufs ist dagegen zu erwarten bei Nickel von 200° C (verschwindende Kristallenergie) und bei einigen der heute in sehr großer Zahl bekannten ferromagnetischen Verbindungen, von denen sich z. B. ein Kobaltferrit und eine Eisen-Platin-Legierung durch extrem hohe Magnetostraktion auszeichnen ([11], [15]; dort weitere Literatur). Eine einigermaßen erschöpfende Auswertung dieser Formeln für die Theorie der Magnetisierungskurve ist an dieser Stelle jedoch nicht möglich und soll deshalb späteren Arbeiten vorbehalten bleiben.

Zur Kennzeichnung des Wandtyps sind in der ersten Spalte der beiden Tabellen die Millerschen Indizes der Wandebene (z. B. (111) für eine Oktaederebene im kubischen Kristall) und der Winkel zwischen den Magnetisierungsvektoren auf beiden Seiten angegeben; für Nickel, das der Anschauung die größeren Schwierigkeiten bereitet, sind die Wandtypen mit den Magnetisierungsvektoren und den zugehörigen Koordinatensystemen (2. Spalte) in Abb. 1—3 skizziert. Der (konstante) Winkel mit der Wandnormalen Θ nach Lilley [12] folgt in der dritten Spalte und in der vierten Spalte der Azimut Φ'_0 der Ausgangslage des Magnetisierungsvektors, gerechnet von der „zweiten“ (negativ-positiven) Winkelhalbierenden der Magnetisierungsvektoren, welcher bei Lilley mit Φ_0 bezeichnet wird (Abb. 4). Das Symbol Φ_0 (5. Spalte) ist hier

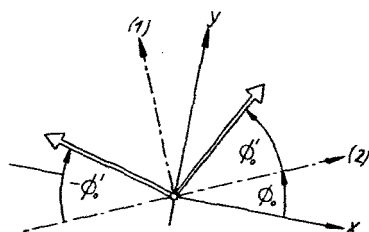


Abb. 4. Projektion der Magnetisierungsvektoren benachbarter Bezirke auf der Wandebene.

- (1) Projektion die ersten Winkelhalbierenden
- (2) Zweite Winkelhalbierende

¹⁾ Die Werte in Tab. (5.1) gelten für den Grenzfall überwiegender Kristallenergie; bei vergleichbaren Werten von elastischer (inkompatibler) Energie und Kristallenergie muß die Magnetisierungsrichtung auch im Innern der Weisschen Bezirke variiert und das Energieminimum bezüglich Θ und Φ aufgesucht werden.

Tabelle (5.1): BLOCHsche Wände der 1. Gruppe

Wandtyp	Aufstellung	Θ	Φ_0'	Φ_0	$\pm e_1^{E\infty}, \pm e_2^{E\infty}, \pm e_6^{E\infty}$
					(Das Vorzeichen wechselt von einem
a) Kristalle vom Eisentyp					
(001); 90°	0 (2.22)	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$e_1 = -e_2 = -\frac{3}{4}\lambda_{100}$ $e_6 = 0$
(111); 90°	Π''' (4.29)	$\frac{\pi}{2} - \eta$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$e_1 = e_2 = 0; e_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_{100}$
b) Kristalle vom Nickeltyp					
(001); 70,53°	0 (2.22)	$\frac{\pi}{2} - \eta$	$\frac{\pi}{4}$	0	$e_1 = e_2 = 0; e_6 = -\lambda_{111}$
(110); 70,53°	Π' (4.27)	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - \eta$	η	$e_1 = -e_2 = \frac{2}{3}\lambda_{111}; e_6 = -\frac{\sqrt{2}}{3}\lambda_{111}$
(110); 109,47°		„	η	$\frac{\pi}{2} + \eta$	
(111); 109,47°	Π''' (4.29)	2η	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$e_1 = e_2 = 0; e_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda_{111}$

dem Winkel zwischen der x -Achse und der zweiten Winkelhalbierenden vorbehalten; es gibt also die Winkeldifferenz zwischen dem der Magnetisierung angepaßten Koordinatensystem von Lilley [12], [4] und unserem den Bedürfnissen der Kristallelastizität und -plastizität [19] entsprechenden Achsendreiein, in welchem der Azimut Φ nach Abb. 4 gegeben ist durch

$$\Phi = \Phi' + \Phi_0. \quad (5.3)$$

In den Formeln von Lilley ist demnach bei der Auswertung Φ' statt Φ einzusetzen.

Ein allgemeiner Vergleich mit der nach der Hypothese der (in allen Komponenten) konstanten Gesamtdehnung berechneten elastischen Energie, wie sie dem Spannungszustand der Schicht mit dem Magnetisierungsazimut Φ' bzw. Φ zwischen zwei starren Platten festen Abstandes entspricht, ist ohne allzu-

bei überwiegender Kristallenergie.

$$\eta = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} = 35,26^\circ$$

$\pm \sigma_1^{G\infty}, \pm \sigma_2^{G\infty}, \pm \sigma_6^{G\infty}$ Weisschen Bezirk zum andern)	$w_{\text{ink}}^{M\infty} [w_{\text{ink}}^M(\Phi)]$	Sonstiges
$\sigma_1 = -\sigma_2 = -$ $\sigma_6 = 0$ $-\frac{3}{4} \lambda_{100} (c_{11} - c_{12})$	$\frac{9}{16} \lambda_{100}^2 (c_{11} - c_{12})$ $\left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{9}{8} \lambda_{100}^2 (c_{11} - c_{12}) \cos^2 2\Phi + \right. \right.$ $\left. \left. + \frac{9}{4} \lambda_{111}^2 c_{44} \sin^2 2\Phi \right\} \right]$	
$\sigma_1 = \sigma_2 = 0;$ $\sigma_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_{100} \left(c_{66}''' - \frac{c_{15}'''^2}{c_{44}'''} \right)$	$\frac{3}{8} \lambda_{100}^2 \left(c_{66}''' - \frac{c_{15}'''^2}{c_{44}'''} \right)$	$\pm e_{44}^{E\infty} = -$ $-\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_{100} \frac{c_{15}'''}{c_{44}'''}$
$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_6 = -\lambda_{111} c_{44}$	$\frac{1}{2} \lambda_{111}^2 c_{44};$ $\left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \lambda_{100}^2 \cos^2 2\Phi + \right. \right.$ $\left. \left. + c_{44} \lambda_{111}^2 \sin^2 2\Phi \right\} \right]$	
$\sigma_1 = \lambda_{111} \left(\frac{2}{3} c_{11}^{*'} - \frac{2}{3} c_{12}^{*'} - \frac{\sqrt{2}}{3} c_{16}^{*'} \right)$ $\sigma_2 = \lambda_{111} \left(\frac{2}{3} c_{12}^{*'} - \frac{2}{3} c_{22}^{*'} - \frac{\sqrt{2}}{3} c_{26}^{*'} \right)$ $\sigma_6 = \lambda_{111} \left(\frac{2}{3} c_{15}^{*'} - \frac{2}{3} c_{26}^{*'} - \frac{\sqrt{2}}{3} c_{66}^{*'} \right)$	$\frac{1}{2} \lambda_{111}^2 \left(\frac{4}{9} c_{11}^{*'} + \frac{4}{9} c_{22}^{*'} + \frac{2}{9} c_{66}^{*'} + \right.$ $\left. + \frac{4\sqrt{2}}{9} c_{26}^{*'} - \frac{4\sqrt{2}}{9} c_{16}^{*'} - \frac{8}{9} c_{12}^{*'} \right)$	$e_3^{E\infty}, e_3^{G\infty},$ $e_2^{M\infty} \neq 0$
$\sigma_1 = \sigma_2 = 0;$ $\sigma_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda_{111} \left(c_{66}''' - \frac{c_{15}'''^2}{c_{44}'''} \right)$	$\frac{2}{3} \lambda_{111}^2 \left(c_{66}''' - \frac{c_{15}'''^2}{c_{44}'''} \right)$	$\pm e_4^E = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{c_{15}'''}{c_{44}'''}$

großen Aufwand für die 180°-Wand in Kobalt möglich. Da in der wirklichen Bloch'schen Wand im Unterschied zur starren Einspannung drei Gesamtdehnungskomponenten freigegeben sind, ist im Vergleich zu dieser eine teilweise Entspannung und damit eine Erniedrigung der elastischen Energie zu erwarten; tatsächlich erhält man für die Differenz den stets negativen oder verschwindenden Ausdruck

$$\Delta W = -\frac{1}{2c_{11}} (c_{12} \lambda_{11} + c_{11} \lambda_{12} - c_{12} \lambda_{22})^2 \sin^4 \Phi. \quad (5.4)$$

Ob dieser eine mit der inkompatiblen Energie vergleichbare Größe erreicht, hängt von den Zahlenwerten des Einzelfalls ab; verschwindet (5.4), so ist damit zugleich die in der Fußnote von S. 28 angegebene Bedingung erfüllt.

Zum Schluß soll noch ein vom Verfasser [4] bereits in isotroper Näherung behandeltes Beispiel exakt berechnet werden, das zeigt, in welcher Weise die Bloch'schen Wände die Grundstruktur, d. h. die in einem sorgfältig gezüchteten, weichen Kristall ursprünglich vorhandene Versetzungsanordnung, beeinflussen können. Die (111)–109,47°-Wand in Nickel ist gittergeometrisch gleichwertig einer flächenhaften Verteilung von Quasi-Schraubenversetzungen in y -Richtung; in derselben Richtung sind aber auch eigentliche, plastische Schraubenversetzungen kristallographisch möglich [19], [1]. In gleichem Abstand aufeinanderfolgende derartige Versetzungswände entgegengesetzten Vorzeichens erzeugen nun nach (6.5) und (6.6) l. c. [4] im dazwischenliegenden Material makroskopisch die elastische Dehnung

$$e_6^{EP} = \pm \frac{1}{2} a = \pm \frac{1}{2} \frac{b}{l} ; e_1^{EP} = e_2^{EP} = 0 \quad (5.5)$$

wo b der Burgersvektor einer einzelnen Schraubenversetzung und l der Versetzungsabstand in der Wand ist. Kommen nun Bloch'sche Wände und Versetzungswände entsprechenden Vorzeichens aufeinander zu liegen, so heben sich nach Vergleich mit Tabelle (5.1) die elastischen Dehnungen dann vollständig auf, wenn

$$\frac{1}{2} \frac{b}{l} - \frac{2}{\sqrt{3}} |\lambda_{111}| = 0 \quad (5.6)$$

ist; mit den Zahlenwerten für Nickel [12], [19] folgt daraus

$$l = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \quad (5.7)$$

also etwa der 1,5fache Wert der isotropen Abschätzung. Die Bedeutung solcher und ähnlicher Strukturen für die Kristallplastizität, insbesondere das Kriechen ferromagnetischer Kristalle, ist bereits in einer bis heute allein möglichen qualitativen Weise in [4] diskutiert; Folgerungen für die Magnetisierungskurve sollen späteren Veröffentlichungen vorbehalten bleiben [21].

6. Eigenspannungen in geschichteten anisotropen Platten

Durch Aufschneiden parallel zu den Schichtebenen läßt sich das nach allen Richtungen unendlich weit ausgedehnte Medium in Platten endlicher Dicke zerlegen. Diese können einmal nach Art einer Scheibe [24] in ihrer Ebene verzerrt sein; die Scheibendehnungen werden durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{xx} \\ \bar{\varepsilon}_{yy} \\ 2 \bar{\varepsilon}_{xy} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

beschrieben. Die durch das Aufschneiden ermöglichten Plattenkrümmungen kann man ebenfalls durch eine Spaltenmatrix ausdrücken, welche aus dem symmetrischen Verkrümmungstensor κ_{ij} [24] hervorgeht durch

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa_{yy} \\ -\kappa_{xx} \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa_{22} \\ -\kappa_{11} \\ 2\kappa_{12} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Tabelle (5.2) BLOCHsche Wände der 2. Gruppe. $\eta = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} = 35,26^\circ$

Wandtyp	Aufstellung	Θ	Φ_0'	Φ_0	e_1^E, e_2^E, e_6^E	$\sigma_1^G, \sigma_2^G, \sigma_6^G$	W_{ink}^M
a) Kristalle vom Eisentyp							
(001); 180°	0 (2.22)	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$e_1 = \frac{3}{2} \lambda_{100} \sin^2 \Phi$ $e_2 = -\frac{3}{2} \lambda_{100} \sin^2 \Phi$ $e_6 = -3 \lambda_{111} \sin \Phi \cos \Phi$	$\sigma_1 = \frac{3}{2} \lambda_{100} (c_{11} - c_{12}) \sin^2 \Phi$ $\sigma_2 = -\frac{3}{2} \lambda_{100} (c_{11} - c_{12}) \sin^2 \Phi$ $\sigma_6 = -3 \lambda_{111} b_{44} \sin \Phi \cos \Phi$	$\frac{9}{4} \lambda_{100}^2 (c_{11} - c_{12}) \sin^2 \Phi$ $- \left[\frac{9}{4} \lambda_{100}^2 (c_{11} - c_{12}) - \frac{9}{2} \lambda_{111}^2 c_{44} \right] \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi$
(110); 90°	I (4.17)	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$e_1 = -\frac{3}{4} \lambda_{100} \sin^2 \Phi'$ $e_2 = \frac{3}{8} (\lambda_{100} + \lambda_{111}) \sin^2 \Phi'$ $e_6 = \frac{3}{2} \lambda_{111} \sin \Phi' \cos \Phi'$	$\sigma_1 = \left[\frac{3}{4} \lambda_{100} \left(-c_{11}^* + \frac{1}{2} c_{12}^* \right) + \frac{3}{8} \lambda_{111} c_{12}^* \right] \sin^2 \Phi'$ $\sigma_2 = \left[\frac{3}{4} \lambda_{100} \left(-c_{12}^* + \frac{1}{2} c_{22}^* \right) + \frac{3}{8} \lambda_{111} c_{22}^* \right] \sin^2 \Phi'$ $\sigma_6 = \frac{3}{2} \lambda_{111} c_{44} \sin \Phi' \cos \Phi'$	$\frac{9 \sin^4 \Phi'}{32 (c_{11} + c_{12} + 2 c_{44})} \left[\lambda_{100}^2 (c_{11}^2 - 2 c_{12}^2 + c_{11} c_{12} + 3 c_{11} c_{44} - 3 c_{12} c_{44}) \right.$ $\left. + 2 \lambda_{100} \lambda_{111} (c_{11} - c_{12}) c_{44} + \lambda_{111}^2 (c_{11} + c_{12}) c_{44} \right]$ $+ \frac{9}{8} \lambda_{111}^2 c_{44} \sin^2 \Phi' \cos^2 \Phi'$
(110); 180°	I	$\frac{\pi}{2}$	0	0	Doppelte Werte der (110) – 90° – Wand mit Vorzeichenwechsel von e_1, e_2, e_6	Doppelte Werte der (110) – 90° – Wand mit Vorzeichenwechsel von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6$	Vierfacher Wert der (110) – 90° – Wand
b) Kristalle vom Nickeltyp							
(001); $109,47^\circ$	0 (2.22)	$\frac{\pi}{2} - \eta$	0	$\frac{\pi}{4}$	$e_1 = -e_2 = \lambda_{100} \sin \Phi' \cos \Phi'$ $e_6 = 2 \lambda_{111} \sin^2 \Phi'$	$\sigma_1 = -\sigma_2 = \lambda_{100} (c_{11} - c_{12}) \sin \Phi' \cos \Phi'$ $\sigma_6 = 2 \lambda_{111} c_{44} \sin^2 \Phi'$	$\sin^2 \Phi' \{ 2 c_{44} \lambda_{111}^2 + [(c_{11} - c_{12}) \lambda_{100}^2 - 2 c_{44} \lambda_{111}^2] \cos^2 \Phi' \}$
(110); 180°	II' (4.27)	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$e_1 = \sin \Phi' \left\{ \lambda_{100} \left(-\frac{1}{4} \sin \Phi' + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \Phi' \right) + \lambda_{111} \left(-\frac{5}{4} \sin \Phi' - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \Phi' \right) \right\}$ $e_2 = \frac{3}{2} \lambda_{111} \sin^2 \Phi'$ $e_6 = \sin \Phi' \left\{ \lambda_{100} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \Phi' + 2 \cos \Phi' \right) + \lambda_{111} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \Phi' + \cos \Phi' \right) \right\}$	$\sigma_1 = \sin \Phi' \left\{ \sin \Phi' \left[\lambda_{100} \left(-\frac{1}{4} c_{11}^* - \frac{\sqrt{2}}{2} c_{16}^* \right) + \lambda_{111} \left(-\frac{5}{4} c_{11}^* + \frac{3}{2} c_{12}^* + \frac{\sqrt{2}}{2} c_{16}^* \right) \right] + \cos \Phi' \left[\lambda_{100} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} c_{11}^* + 2 c_{16}^* \right) + \lambda_{111} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} c_{11}^* + c_{16}^* \right) \right] \right\}$ $\sigma_2 = \sin \Phi' \left\{ \sin \Phi' \left[\lambda_{100} \left(-\frac{1}{4} c_{12}^* - \frac{\sqrt{2}}{2} c_{26}^* \right) + \lambda_{111} \left(-\frac{5}{4} c_{12}^* + \frac{3}{2} c_{22}^* + \frac{\sqrt{2}}{2} c_{26}^* \right) \right] + \cos \Phi' \left[\lambda_{100} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} c_{12}^* + 2 c_{26}^* \right) + \lambda_{111} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} c_{12}^* + c_{26}^* \right) \right] \right\}$ $\sigma_6 = \sin \Phi' \left\{ \sin \Phi' \left[\lambda_{100} \left(-\frac{1}{4} c_{16}^* - \frac{\sqrt{2}}{2} c_{66}^* \right) + \lambda_{111} \left(-\frac{5}{4} c_{16}^* + \frac{3}{2} c_{26}^* + \frac{\sqrt{2}}{2} c_{66}^* \right) \right] + \cos \Phi' \left[\lambda_{100} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} c_{16}^* + 2 c_{66}^* \right) + \lambda_{111} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} c_{16}^* + c_{66}^* \right) \right] \right\}$	$\frac{1}{2} \sin^2 \Phi' \left\{ \left[\lambda_{100}^2 \left(\frac{1}{16} c_{11}^* + \frac{1}{2} c_{66}^* + \frac{\sqrt{2}}{4} c_{16}^* \right) + \lambda_{100} \lambda_{111} \left(\frac{5}{8} c_{11}^* - c_{66}^* - \frac{3\sqrt{2}}{2} c_{26}^* + \sqrt{2} c_{16}^* - \frac{3}{4} c_{12}^* \right) + \lambda_{111}^2 \left(\frac{25}{16} c_{11}^* + \frac{9}{4} c_{22}^* + \frac{1}{2} c_{66}^* + \frac{3\sqrt{2}}{2} c_{26}^* - \frac{5\sqrt{2}}{4} c_{16}^* - \frac{15}{4} c_{12}^* \right) \right] + \sin \Phi' \cos \Phi' \left[\lambda_{100}^2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} c_{11}^* - 2\sqrt{2} c_{66}^* - 2 c_{16}^* \right) + \lambda_{100} \lambda_{111} \left(-\sqrt{2} c_{11}^* + \sqrt{2} c_{66}^* + 6 c_{26}^* - \frac{7}{2} c_{16}^* + \frac{3\sqrt{2}}{2} c_{12}^* \right) + \lambda_{111}^2 \left(\frac{5\sqrt{2}}{4} c_{11}^* + \sqrt{2} c_{66}^* + 3 c_{26}^* - \frac{7}{2} c_{16}^* - \frac{3\sqrt{2}}{2} c_{12}^* \right) \right] + \cos^2 \Phi' \left[\lambda_{100}^2 \left(\frac{7}{16} c_{11}^* + \frac{7}{2} c_{66}^* + \frac{7\sqrt{2}}{4} c_{16}^* \right) + \lambda_{100} \lambda_{111} \left(-\frac{13}{8} c_{11}^* + 5 c_{66}^* - \frac{3\sqrt{2}}{2} c_{26}^* - 2\sqrt{2} c_{16}^* + \frac{3}{4} c_{12}^* \right) + \lambda_{111}^2 \left(-\frac{17}{16} c_{11}^* - \frac{9}{4} c_{22}^* + \frac{1}{2} c_{66}^* - \frac{3\sqrt{2}}{2} c_{26}^* + \frac{\sqrt{2}}{4} c_{16}^* + \frac{15}{4} c_{12}^* \right) \right] \right\}$
(112); 180°	II'' (4.28)	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$e_1 = \left(-\frac{1}{4} \lambda_{100} - \frac{5}{4} \lambda_{111} \right) \sin^2 \Phi'$ $e_2 = \frac{3}{2} \lambda_{111} \sin^2 \Phi'$ $e_6 = (2 \lambda_{100} + \lambda_{111}) \sin \Phi' \cos \Phi'$	$\sigma_1 = \left[-\frac{1}{4} \lambda_{100} c_{11}^{*''} + \lambda_{111} \left(-\frac{5}{4} c_{11}^{*''} + \frac{3}{2} c_{12}^{*''} \right) \right] \sin^2 \Phi'$ $\sigma_2 = \left[-\frac{1}{4} \lambda_{100} c_{12}^{*''} + \lambda_{111} \left(-\frac{5}{4} c_{12}^{*''} + \frac{3}{2} c_{22}^{*''} \right) \right] \sin^2 \Phi'$ $\sigma_6 = \left[2 \lambda_{100} c_{66}^{*''} + \lambda_{111} c_{66}^{*''} \right] \sin \Phi' \cos \Phi'$	$\frac{1}{2} \sin^2 \Phi' \left\{ \left[\frac{1}{16} \lambda_{100}^2 c_{11}^{*''} + \lambda_{100} \lambda_{111} \left(\frac{5}{8} c_{11}^{*''} - \frac{3}{4} c_{12}^{*''} \right) + \lambda_{111}^2 \left(\frac{25}{16} c_{11}^{*''} - \frac{15}{4} c_{12}^{*''} + \frac{9}{4} c_{22}^{*''} \right) + \cos^2 \Phi' \left[\lambda_{100}^2 \left(-\frac{1}{16} c_{11}^{*''} + 4 c_{66}^{*''} \right) + \lambda_{100} \lambda_{111} \left(-\frac{5}{8} c_{11}^{*''} + \frac{3}{4} c_{12}^{*''} + 4 c_{66}^{*''} \right) + \lambda_{111}^2 \left(-\frac{25}{16} c_{11}^{*''} + \frac{15}{4} c_{12}^{*''} - \frac{9}{4} c_{22}^{*''} + c_{66}^{*''} \right) \right] \right\}$
c) Kristalle vom Kobalttyp							
180° , Ebene durch sechszählige Achse	$h \perp$ (4.30) (3.9) mit $x \parallel z$	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$e_1 = \lambda_{33} \sin^2 \Phi$ $e_2 = -\lambda_{11} \sin^2 \Phi$ $e_6 = -\lambda_{44} \sin \Phi \cos \Phi$	$\sigma_1 = \left[\lambda_{33} \left(c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) - \lambda_{11} \left(c_{13} - \frac{c_{12} c_{13}}{c_{11}} \right) \right] \sin^2 \Phi$ $\sigma_2 = \left[\lambda_{33} \left(c_{12} - \frac{c_{12} c_{13}}{c_{11}} \right) - \lambda_{11} \left(c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) \right] \sin^2 \Phi$ $\sigma_6 = -\lambda_{44} c_{44} \sin \Phi \cos \Phi$	$\frac{1}{2} \sin^2 \Phi \left\{ (1 - \cos^2 \Phi) \left[\lambda_{33}^2 \left(c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right) - 2 \lambda_{11} \lambda_{33} \left(c_{13} - \frac{c_{12} c_{13}}{c_{11}} \right) + \lambda_{11}^2 \left(c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) \right] + \lambda_{44}^2 c_{44} \cos^2 \Phi \right\}$

Entsprechend lassen sich die Scheibenspannungen

$$\begin{pmatrix} \sum_1 \\ \sum_2 \\ \sum_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{xx} \\ \sum_{yy} \\ \sum_{xy} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

und die Biegemomente aus dem symmetrischen Momententensor M_{ij} [24]

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_{yy} \\ -M_{xx} \\ +M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_{22} \\ -M_{11} \\ +M_{12} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

zu Spaltenmatrizen zusammenfassen.

Als Hookesches Gesetz für den kombinierten Scheiben- und Platten-
spannungszustand kann man nun die allgemeinste lineare Beziehung zwischen
diesen Größen bezeichnen; in Matrizenform ausgeschrieben erscheint sie in
der Form

$$\begin{pmatrix} \sum_1 \\ \sum_2 \\ \sum_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \\ D_{11} & D_{21} & D_{61} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{62} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_6 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_6 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

oder mit Hilfe der Zusammenfassungen

$$(E_\alpha) = \begin{pmatrix} \bar{e}_\alpha \\ \kappa_\alpha \end{pmatrix} ; (\Pi_\alpha) = \begin{pmatrix} \sum_\alpha \\ M_\alpha \end{pmatrix} ; (K_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} (C_{ab}) & (D_{ab}) \\ (D_{ba}) & (B_{ab}) \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; a, b = 1, 2, 6) \quad (6.6)$$

abgekürzt als

$$\Pi_\alpha = K_{\alpha\beta} E_\beta \quad (6.7)$$

wobei die Matrix $K_{\alpha\beta}$ symmetrisch sein muß, wenn die elastische Energie eine
Zustandsfunktion sein soll¹⁾.

In der gewöhnlichen, homogenen Platte bzw. Scheibe verschwinden nun
alle D_{ab} , so daß sich Platten- und Scheibenspannungszustand unabhängig
voneinander einstellen können, wenn man nur die Verzerrungs- und Beanspruchungsgrößen auf die in der Mittelebene der Platte gelegene *neutrale Fläche* bezieht. Bei geschichteten Platten dagegen fallen die verschiedenen in der homogenen Platte möglichen Definitionen der neutralen Fläche auseinander; die im üblichen Sinne *kinematisch neutrale*, d. h. von Scheibendehnungen freie Fläche hängt dann i. allg. sogar vom Beanspruchungs- und Verzerrungszustand ab. Nach *Hachmann* [26] tritt dies z. B. schon bei iso-

¹⁾ Daß in den drei Matrizen (6.6) jeweils Größen verschiedener Dimension zusammengefaßt sind, hat, wie man leicht beim Anschreiben der elastischen Energie erkennt, darauf keinen Einfluß.

tropem Material auf, wenn die Querkontraktionszahl von Schicht zu Schicht wechselt und keine Symmetrieebene existiert. In diesem Falle ist es auch nicht mehr möglich, eine Fläche außerhalb der Mittelebene allgemeingültig als neutrale Fläche zu definieren.

Bei der Zurückführung von (6.5) auf die Größen des dreidimensionalen Spannungs- und Dehnungszustandes ist also im Gegensatz zur homogenen Platte die Mittelebene von vornherein nicht bevorzugt; wir beziehen daher die Scheibendehnungen $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_6$ auf die Ebene $z = 0$ und lassen die Plattendicke sich zwischen $z = 0$ und $z = Z$ erstrecken. Der Ansatz (2.4) für eine kompatible Gesamtdehnung muß nun, da die Randbedingung der Beschränktheit für unendliches z wegfällt, um ein lineares Glied erweitert werden, welches die Plattenkrümmung wiedergibt (vgl. Fußnote S. 25). Man erhält mit den Bezeichnungen (6.1)–(6.4)

$$e_a^G = \bar{e}_a^G + \kappa_a z \quad (a = 1, 2, 6) \quad (6.8)$$

Nun lassen wir die Frage nach dem physikalischen Ursprung der Verzerrungen zunächst einmal beiseite, d. h. wir kümmern uns nicht darum, ob sie von inneren oder äußeren Spannungen herrühren. Wir können dann in Anlehnung an die Form (1.1) des Hookeschen Gesetzes aus den drei Komponenten (6.8) der Gesamtdehnung eine den geometrischen und statischen Besonderheiten der Platte (vgl. (2.3) und (6.8)) angepaßte *modifizierte dehnungswirksame Spannung* σ_a^{D*} mit drei nicht verschwindenden Komponenten berechnen, indem wir die Elastizitätskonstanten c_{ab} durch die Beiwerte c_{ab}^* nach (2.16) bzw. (2.25) ersetzen und so die freie Einstellbarkeit der z -Dehnungen von vornherein berücksichtigen. Es folgt

$$\sigma_a^{D*} = c_{ab}^* e_b^G \quad (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.9)$$

Bei Abwesenheit von Eigenspannungen, und nur dann, ist σ_a^{D*} mit der Gesamtspannung σ_a^G identisch.

Scheibenspannung und Biegemomente erhält man nun durch Reduktion der Schnittkräfte und -momente auf eine zur Plattenebene parallele Fläche; da in diesem allgemeinsten Fall keine *neutrale Fläche* ausgezeichnet ist, wählen wir wieder $z = 0$ als Bezugsfläche. Symbolisieren wir noch zur Abkürzung die Integration von 0 bis Z durch geschweifte Klammern:

$$\{f\} \equiv \{f(z)\} \equiv \{f(z)\}(Z) \equiv \int_0^Z f(z) dz \quad (6.10)$$

so ergibt sich die dehnungswirksame Scheibenspannung in den Bezeichnungen von (6.3) nach (6.8) und (6.9) zu

$$\sum_a^D = \{\sigma_a^{D*}\} = \{c_{ab}^* e_b^G\} = \{c_{ab}^*(z)\} \bar{e}_b^G + \{z c_{ab}^*(z)\} \kappa_b \quad (6.11)$$

und das dehnungswirksame (oder krümmungswirksame) Biegemoment mit den Bezeichnungen (6.4) zu

$$M_a^D = \{z \sigma_a^{D*}\} = \{z c_{ab}^* e_b^G\} = \{z c_{ab}^*(z)\} \bar{e}_b^G + \{z^2 c_{ab}^*(z)\} \kappa_b \quad (6.12)$$

Durch Zusammenfassen von (6.11) und (6.12) folgt dann das *Hookesche Gesetz* (6.5) in der Form

$$\begin{bmatrix} \sum_1^D \\ \sum_2^D \\ \sum_6^D \\ M_1^D \\ M_2^D \\ M_6^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{c_{11}^*\} & \{c_{12}^*\} & \{c_{16}^*\} & \{z c_{11}^*\} & \{z c_{12}^*\} & \{z c_{16}^*\} \\ & \{c_{22}^*\} & \{c_{26}^*\} & & \{z c_{22}^*\} & \{z c_{26}^*\} \\ & & \{c_{66}^*\} & & & \{z c_{66}^*\} \\ & & & \{z^2 c_{11}^*\} & \{z^2 c_{12}^*\} & \{z^2 c_{16}^*\} \\ & & & & \{z^2 c_{22}^*\} & \{z^2 c_{26}^*\} \\ & & & & & \{z^2 c_{66}^*\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e}_1^G \\ \overline{e}_2^G \\ \overline{e}_6^G \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_6 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

oder, wenn man die geschweiften Integrationsklammern um die Matrizen herumzieht und zu der Blockschreibweise (6.6) übergeht

$$\begin{pmatrix} (\sum_a^D) \\ (M_a^D) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} (c_{ab}^*(z)) & (z c_{ab}^*(z)) \\ (z c_{ab}^*(z)) & (z^2 c_{ab}^*(z)) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} (\overline{e}_a^G) \\ (\kappa_a) \end{pmatrix} \quad (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.14)$$

Wie man leicht erkennt, verschwinden die Untermatrizen $D_{ab} = \{z c_{ab}^*\}$ dann, wenn man z durch $z - \frac{Z}{2}$ ersetzt und die Beiwerte c_{ab}^* von z nicht abhängen, d. h. also bei der homogenen Platte in der üblichen Behandlungsweise.

Die Einführung der Eigenspannungen erfolgt nun durch Einsetzen von (1.4) und (6.8) in (2.15); man erhält die nicht verschwindenden Komponenten der Gesamtspannung zu

$$\sigma_a^G = c_{ab}^* (\overline{e}_b^G + z \kappa_b - e_b^Q) \quad (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.15)$$

und daraus durch die Integrationen

$$\sum_a^G = \{\sigma_a^G\} \quad \text{und} \quad M_a^G = \{z \sigma_a^G\} \quad (6.16)$$

die Gesamtscheibenspannungen und die Gesamtbiegemomente. In Blockmatrizenform und mit herausgezogenen Integrationsklammern schreibt sich das Ergebnis

$$\begin{pmatrix} (\sum_a^G) \\ (M_a^G) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} (c_{ab}^*(z)) & (z c_{ab}^*(z)) \\ (z c_{ab}^*(z)) & (z^2 c_{ab}^*(z)) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} (\overline{e}_a^G) \\ (\kappa_a) \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} (c_{ab}^*(z)) & (z c_{ab}^*(z)) \\ (z c_{ab}^*(z)) & (z^2 c_{ab}^*(z)) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} (e_a^Q(z)) \\ (0) \end{pmatrix} \quad (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.17)$$

Bei Abwesenheit äußerer Kräfte und Momente muß die linke Seite im Gleichgewicht verschwinden. Sind die elastischen Konstanten und die Extra-
dehnungen in der Plattenebene für jedes z bekannt, so erlaubt das Gleichungs-

system die Berechnung von Krümmung und Scheibendehnung. (6.17) rechtfertigt auch nachträglich den Ansatz (2.4) für das allseitig unendlich ausge dehnte Medium, denn mit $Z \rightarrow \infty$ wachsen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die c_{ab}^* die Beiwerte der Krümmungskomponenten in jeder einzelnen Gleichung um eine Ordnung stärker über alle Grenzen als die Beiwerte der Scheibendehnungen. Das bedeutet aber verschwindende Krümmungen im Grenzfall.

Praktisch mindestens ebenso wichtig wie die Berechnung der Verzerrungsgrößen aus der bekannten Extradehnung ist die umgekehrte Aufgabe, nämlich die experimentelle Bestimmung der unbekannten Eigenspannungen. Diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit der Bestimmung der drei wesentlichen Extradehnungskomponenten; lediglich ein eigenspannungsfreier und daher in diesem Zusammenhang bedeutungsloser Anteil der Extradehnung von der Form (6.8) bleibt unbestimmt. Der wesentlichste Schritt einer mechanischen Eigenspannungsmessung ist die schichtweise Abtragung der Platte [28]; die Plattendicke Z wird also veränderlich und die Größen der Gleichung (6.17) Funktionen von Z , aus deren Verlauf auf die Extradehnung geschlossen werden kann. So haben *Treuting* und *Read* [27] aus Krümmungsmessungen während der Abtragung einer homogenen, isotropen Platte durch eine geeignete Integration den Eigenspannungsverlauf bestimmt.

Wie das Gleichungssystem (6.17) zeigt, stehen für die drei unbekannten Funktionen $e_a^Q(z)$ sechs Gleichungen zur Verfügung; unter diesen sowie den zugehörigen Meßgrößen muß eine Auswahl nach praktischen Gesichtspunkten getroffen werden. Aus der Vielzahl der möglichen Kombinationen sollen hier die vier nächstliegenden diskutiert werden, nämlich

- a) Messung der Scheibendehnung als Funktion von Z bei zwangsweise unterbundener Krümmung,
- b) Unterdrückung der Krümmung bei freier Scheibendehnung durch meßbar angebrachte Randmomente,
- c) Messung der Krümmung bei freier Verformung,
- d) Messung der Scheibendehnung bei freier Verformung.

Die ersten beiden Methoden kommen vor allem bei sehr dünnen Blechen der Größenordnung mm in Frage, die letzten beiden bei dickeren Platten, bei denen eine zwangsweise Führung praktisch nicht mehr zu erreichen ist. Natürlich lassen sich auch a) und b) oder c) und d) zur gegenseitigen Kontrolle kombinieren. Die von z abhängigen Elastizitätskonstanten bzw. -koeffizienten seien als bekannt vorausgesetzt; andernfalls können sie zumindest bei genügend dicken Platten nach Zerlegung in genügend dünne Scheiben an den einzelnen Schichten gemessen werden. Bereitet dies bei sehr dünnen Blechen experimentelle Schwierigkeiten, so ist auch eine Bestimmung durch Biege- oder Zugversuche an der Gesamtplatte während der Abtragung denkbar, denn das Verhalten eines elastischen Körpers gegenüber äußeren Kräften ist nach *Colonnetti* [25] von den Eigenspannungen unabhängig, solange nirgends die Proportionalitätsgrenze überschritten wird. Auf diese rechnerisch naturgemäß ziemlich aufwendigen Verfahren soll aber hier nicht eingegangen werden.

a) Die Messung der Scheibendehnung bei unterdrückter Krümmung kann an nicht zu dicken Blechen zwischen zwei gut geschmierten, sehr dicken und

damit gegenüber dem Blech praktisch starren Wänden z. B. mit Hilfe eines Komparators an vorher angebrachten Markierungen ausgeführt werden. Die für diese Messung notwendigen Löcher in einer der Wände dürften die Messung nicht allzusehr stören, da bei idealer Führung und Reibungsfreiheit schon die Unterdrückung der Krümmung am Rande genügen würde. Auch Messung mit Dehnungsmeßstreifen ist möglich; es ist dann nur darauf zu achten, daß diese während des Abtragungsvorgangs nicht beschädigt werden.

Auf der linken Seite des Gleichungssystems (6.17) verschwinden unter diesen Bedingungen nur die Scheibenspannungen, nicht aber die Biegemomente; dafür können auf der rechten Seite die Krümmungen gleich Null gesetzt werden. Man erhält somit

$$\begin{pmatrix} (0) \\ (M_a^G(Z)) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} (c_{ab}^*(z)) & (z c_{ab}^*(z)) \\ (z c_{ab}^*(z)) & (z^2 c_{ab}^*(z)) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} (\overline{e}_a^G(Z)) \\ (0) \end{pmatrix} \\ - \left\{ \begin{pmatrix} (c_{ab}^*(z)) & (z c_{ab}^*(z)) \\ (z c_{ab}^*(z)) & (z^2 c_{ab}^*(z)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e_a^Q(z)) \\ (0) \end{pmatrix} \right\} \\ (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.18)$$

Beim Ausmultiplizieren zerfällt diese Matrixengleichung in zwei Gruppen zu je drei Gleichungen, deren erste, nämlich

$$\{c_{ab}^*(z)\} \overline{e}_b^G(Z) - \{c_{ab}^*(z) e_b^Q(z)\} = 0 \quad (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.19)$$

neben den bekannten Elastizitätskonstanten und den gemessenen Scheibendeformationen nur noch die gesuchten Extradehnungen enthält. Differenzieren nach Z führt auf

$$c_{ab}^*(Z) \overline{e}_b^G(Z) + \{c_{ab}^*(z)\} \frac{d \overline{e}_b^G}{dZ} - c_{ab}^*(Z) e_b^Q(Z) = 0 \\ (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.20)$$

Zur Auflösung dieser Gleichung nach e_a^Q muß noch die Matrix c_{ab}^* umgekehrt werden; wir verwenden für Matrizenumkehrungen die symbolische Schreibweise

$$[\mu_{ab}]^{-1} \mu_{bc} = \delta_{ac} \quad (6.21)$$

wo δ_{ab} das *Kronecker-Symbol* (die Einheitsmatrix) bedeutet. Bei der Umkehrung einer Matrix kann das Ergebnis wesentlich von dem Wertevorrat der Indizes abhängen; z. B. erhält man als inverse Matrix zu den Elastizitätskoeffizienten im allgemeinen dreidimensionalen Fall

$$[s_{ab}]^{-1} = c_{ab} \quad \text{für } a, b = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (6.22)$$

dagegen bei Beschränkung auf die in der Plattenebene maßgebenden Koeffizienten nach (2.24)

$$[s_{ab}]^{-1} = c_{ab}^* \quad \text{für } a, b = 1, 2, 6 \quad (6.23)$$

Damit kann (6.20) nach den e_b^Q aufgelöst werden; es folgt

$$e_a^Q(Z) = \overline{e}_a^G(Z) + s_{ab}(Z) \{c_{bc}^*(z)\} \frac{d\overline{e}_c^G}{dZ} \quad (a, b, c = 1, 2, 6) \quad (6.24)$$

Die gesuchten Werte können also durch Differentiation und Integration bekannter bzw. gemessener Funktionen ermittelt werden. In der so gefundenen Extradehnung ist noch ein *eigenspannungsfreier* Anteil der Form (6.8) enthalten, welcher sich bei Wegfall der Führung und Freigabe der Verformung entspannen kann. Man eliminiert ihn, indem man nun nach (6.17) Krümmung und Scheibendehnung der ursprünglichen, kräftefreien Platte berechnet und aus den gefundenen Werten durch Einsetzen in (6.15) die wesentlichen Komponenten der elastischen Dehnung und die ursprünglichen Eigenspannungen bestimmt. Das Verfahren läßt sich auch leicht in der von Leaf [28] empfohlenen Art modifizieren, nach der im letzten Drittel Abtragungsfläche und Meßfläche vertauscht werden.

b) Die Bestimmung der zur Unterdrückung der Krümmung notwendigen Randmomente kann z. B. in einer Anordnung nach Art der Abb. 5 geschehen; man hat, wenn die Hauptrichtungen des Eigenspannungszustandes nicht be-

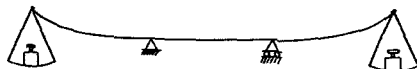


Abb. 5. Messung eines inneren Biegemoments
(Prinzipskizze; Längserstreckung des Probestreifens senkrecht zur Zeichenebene)

kannt sind, längs drei in verschiedenen Richtungen ausgeschnittenen Streifen Biegemomente anzubringen. Um freie Scheibendehnung zu gewährleisten, sind die Auflagerstege zu schmieren und — wegen der Wechselwirkung zwischen Krümmung und Scheibendehnung — der außerhalb der Stege gelegene Teil der Streifen in engen Abständen zu schlitzen. Noch günstiger dürfte die Aufbringung des Biegemoments durch eine Vielzahl dicht beieinanderliegender Hebel sein.

Es gilt wieder (6.18); diesmal wird aber die zweite Gruppe der ausmultiplizierten Gleichungen benötigt, nämlich

$$M_a^G(Z) = \{z c_{ab}^*(z)\} \overline{e}_b^G(Z) - \{z c_{ab}^*(z) e_b^Q(z)\} \quad (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.25)$$

Nun wird die Scheibendehnung nach (6.19) eliminiert; es folgt daraus durch Auflösung nach $\overline{e}_a^G(Z)$

$$\overline{e}_b^G(Z) = [\{c_{bc}^*(z)\}]^{-1} \{c_{cd}^*(z) e_d^Q(z)\} \quad (b, c, d = 1, 2, 6) \quad (6.26)$$

Hier darf man die geschweiften Integrationsklammern nicht vor die eckigen Umkehrklammern ziehen, da Integration und Inversion einer Matrix nicht vertauschbar sind. Mit der Abkürzung

$$\zeta_{ac}^{(1)}(Z) = \{z c_{ab}^*(z)\} [\{c_{bc}^*(z)\}]^{-1} \quad (a, b, c = 1, 2, 6) \quad (6.27)$$

erhält man dann nach Einsetzen in (6.25) für die gesuchte Extradehnung $e_a^Q(z)$ die Integralgleichung

$$\left\{ \left(\zeta_{ab}^{(1)}(Z) - z \delta_{ab} \right) c_{bc}^*(z) e_c^Q(z) \right\} = M_a(Z) \quad (a, b, c = 1, 2, 6) \quad (6.28)$$

Die Möglichkeiten zur numerischen Auflösung werden weiter unten diskutiert. Auch hier ist in der Extradehnung noch ein eigenspannungsfreier Anteil enthalten, der auf die unter a) beschriebene Weise eliminiert werden muß.

Die physikalische Bedeutung der i. allg. unsymmetrischen Matrix $\zeta_{ab}^{(1)}(Z)$ erkennt man aus dem Verschwinden einzelner Diagonalglieder des Ausdrucks $\left(\zeta_{ab}^{(1)}(Z) - z \delta_{ab} \right)$ auf der linken Seite von (6.28) für bestimmte Werte von z ; das bedeutet, daß z. B. eine (für die Platte modifizierte) singuläre Extraspannungskomponente (*innere Schnittkraft*) $\sigma_1^{Q*}(z) = -c_{1c}^*(z) e_c^Q(z)$ oder auch eine entsprechende äußere Schnittkraft in der Höhe $z = \zeta_{11}^{(1)}$ keinen Beitrag zum Biegemoment M_1 liefert; die Diagonalglieder kennzeichnen also eine Art „*statisch neutraler Flächen*“ für die einzelnen Schnittkraft- und Biegemomentkomponenten. Die Matricelemente außerhalb der Hauptdiagonale stellen dagegen eine von der Höhe der Angriffslinie unabhängige Kopplung zwischen indexfremden Komponenten von Schnittkraft und Biegemoment dar, wie sie nur bei inhomogen geschichteten Platten vorkommen kann. Denn bei homogenem Material kann man in (6.27) die konstante Matrix $c_{ab}^* = \bar{c}_{ab}^*$ vor das Integralzeichen ziehen, und es folgt dann einfach

$$\zeta_{ab}^{(1)} = \frac{Z}{2} \delta_{ab}, \quad (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.29)$$

d. h. die von der homogenen Platte her bekannte neutrale Fläche in der Plattenmittelebene. Dasselbe Ergebnis folgt für eine zur Mittelebene symmetrische Schichtung [26], denn dann verschwindet $\left\{ \left(z - \frac{Z}{2} \right) c_{ab}^* \right\}$, und es ist nach (6.27)

$$\zeta_{ac}^{(1)}(Z) = \left\{ \frac{Z}{2} c_{ab}^*(z) + \left(z - \frac{Z}{2} \right) c_{ab}^*(z) \right\} \left[\{ c_{ab}^*(z) \} \right]^{-1} = \frac{Z}{2} \delta_{ac} \quad (6.30)$$

Leider bleibt diese Symmetrie beim Abtragungsversuch nicht erhalten. Eine einheitliche neutrale Fläche, allerdings nicht mehr in der Plattenmittelebene, erhält man auch, wenn sich in c_{ab}^* nur ein allen Elementen gemeinsamer Skalarfaktor mit z verändert, also

$$c_{ab}^*(z) = f(z) \bar{c}_{ab}^* \quad (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.31)$$

ist. Dann dann ergibt (6.27)

$$\zeta_{ab}^{(1)}(Z) = \frac{\{ z f(z) \}}{Z} \delta_{ab} \quad (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.32)$$

Dazu gehört nach Hachmann [26] im Isotropen der Sonderfall, daß bei veränderlichem Dehnungsmodul die Querkontraktionszahl über den ganzen Querschnitt konstant bleibt.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß man in (6.28) als neue Unbekannte zweckmäßigerweise in Anlehnung an (1.5) die den geometrischen und statischen Eigenschaften der Platte angepaßte „modifizierte Extrapannung“

$$\sigma_a^{Q*} = -c_{ab}^* e_b^Q \quad (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.33)$$

einführt. Die Integralgleichung geht dann über in

$$\{(\zeta_{ab}^{(1)}(Z) - z \delta_{ab}) \sigma_b^{Q*}(z)\} = -M_a(Z) \quad (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.34)$$

Man spart also bei der — in den meisten praktischen Fällen wohl numerischen — Auflösung eine Matrizenmultiplikation ein. Bei Bedarf läßt sich anschließend leicht durch Multiplikation mit den Elastizitätskoeffizienten auch die Extradehnung gewinnen.

c) Die beiden folgenden Verfahren benutzen den Gleichgewichtszustand; also gilt (6.17) mit verschwindender linker Seite. Unter Benutzung der modifizierten Extrapannung (6.33) erhält man

$$\left\{ \begin{pmatrix} c_{ab}^*(z) & (z c_{ab}^*(z)) \\ (z c_{ab}^*(z)) & (z^2 c_{ab}^*(z)) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \overline{e_a^G(Z)} \\ (\kappa_a(Z)) \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} \sigma_a^{Q*}(\overline{z}) \\ (z \sigma_a^{Q*}(z)) \end{pmatrix} \right\} = 0 \quad (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.35)$$

Beim Ausmultiplizieren erhält man die beiden Gleichungsgruppen

$$\{c_{ab}^*(z)\} \overline{e_b^G(Z)} + \{z c_{ab}^*(z)\} \kappa_b(Z) + \{\sigma_a^{Q*}(z)\} = 0 \quad (6.36)$$

$$\{z c_{ab}^*(z)\} \overline{e_b^G(Z)} + \{z^2 c_{ab}^*(z)\} \kappa_b(Z) + \{z \sigma_a^{Q*}(z)\} = 0, \quad (a, b = 1, 2, 6) \quad (6.37)$$

aus denen man nach Belieben $\overline{e_a^G}$ oder κ_a eliminieren kann. Für Krümmungsmessungen löst man (6.36) nach e_b^G auf

$$\overline{e_b^G(Z)} = -[\{c_{bc}^*(z)\}]^{-1} \{z c_{cd}^*(z)\} \kappa_d(Z) - [\{c_{bc}^*(z)\}]^{-1} \{\sigma_d^{Q*}(z)\} \quad (b, c, d = 1, 2, 6) \quad (6.38)$$

und erhält daraus durch Einsetzen in (6.37) mit (6.27)

$$\{(\zeta_{ab}^{(1)}(Z) - z \delta_{ab}) \sigma_b^{Q*}(z)\} = -\{z(\zeta_{ab}^{(1)}(Z) - z \delta_{ab}) c_{bc}^*(z)\} \kappa_c(Z), \quad (a, b, c = 1, 2, 6) \quad (6.40)$$

also eine Integralgleichung vom selben Typ wie (6.34).

Da die Messung jetzt bei währendem Gleichgewicht erfolgt, kann man das aus (6.40) bestimmte σ_a^{Q*} nach (6.33) unmittelbar in (6.15) einsetzen, wenn man außer der Anfangskrümmung auch die Anfangsscheibendehnung kennt. Eine andere, praktisch sicher oft ausreichende Möglichkeit besteht darin,

Anfangskrümmung und Anfangsscheibendehnung willkürlich zu Null zu setzen; dann stehen auf der rechten Seite von (6.40) nicht die absoluten Krümmungswerte, sondern die Differenzen gegenüber der Anfangskrümmung. Führt man allerdings (6.40) auf Differentialgleichungen zurück (s. u.), so ist die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen mit den Integrationskonstanten noch besonders zu prüfen. Bei dicken Platten hat man außerdem noch auf genügende Entfernung der Meßstellen vom Rande zu achten.

d) Für Dehnungsmessungen bei freier Verformung löst man (6.36) nach κ_b auf

$$\kappa_b(Z) = - [\{z c_{bc}^*(z)\}]^{-1} \{c_{cd}^*(z)\} \bar{e}_d^G(Z) - [\{z c_{bc}^*(z)\}]^{-1} \{\sigma_c^{Q*}(z)\} \quad (b, c, d = 1, 2, 6) \quad (6.41)$$

und setzt in (6.37) ein. Mit der Abkürzung

$$\zeta_{ac}^{(2)}(Z) = \{z^2 c_{ab}^*(z)\} [\{z c_{bc}^*(z)\}]^{-1} \quad (a, b, c = 1, 2, 6) \quad (6.42)$$

folgt dann die Integralgleichung

$$\{(\zeta_{ab}^{(2)}(Z) - z \delta_{ab}) \sigma_b^{Q*}(z)\} = - \{(\zeta_{ab}^{(2)}(Z) - z \delta_{ab}) c_{bc}^*\} \bar{e}_c^G(Z) \quad (6.43)$$

also wiederum vom selben Typ wie (6.34), allerdings diesmal mit einer anderen ζ -Matrix. Auch in $\zeta_{ab}^{(2)}$ sind die Diagonalglieder leicht zu deuten: sie geben die Höhe an, in der eine (innere oder äußere) Schnittkraftkomponente keine Dehnung mit demselben Index in der Meßfläche hervorruft. Im homogenen Falle wird

$$\zeta_{ab}^{(2)}(Z) = \frac{2}{3} Z \delta_{ab} \quad (6.44)$$

also $\frac{2}{3} Z$ die Höhe in der Platte, bei der sich die durch Krümmung und Scheibendehnung in der Meßfläche $z = 0$ hervorgerufenen Verzerrungen gerade aufheben. Die Glieder außerhalb der Hauptdiagonalen stellen eine von der Höhe der Angriffslinie unabhängige Wechselwirkung zwischen indexfremden Schnittkräften und Scheibendehnungen dar, die nur in inhomogen geschichteten Platten auftritt. Bei einer vergleichenden Beurteilung der Methoden c) und d) wird man darauf achten müssen, ob vielleicht eines der Diagonalglieder von $\zeta_{ab}^{(1)}(Z)$ oder $\zeta_{ab}^{(2)}(Z)$ während der Abtragung gleich der Plattendicke Z wird oder ihr sehr nahe kommt; indessen dürften solche Effekte nur in so extremen Fällen wie etwa Verbundplatten aus Gummi und Stahlblechen praktisch bedeutungsvoll werden. Für die Berechnung der ursprünglichen Gesamtspannung gilt wieder das unter c) Gesagte.

Die Berechnung der Eigenspannungen aus den Meßwerten führt also bei den Verfahren b), c) und d) auf die Lösung von Integralgleichungen (6.34), die sich von gewöhnlichen gekoppelten Integralgleichungen 1. Art durch die veränderliche obere Integrationsgrenze Z unterscheiden. Zwar läßt sich dieser Unterschied durch Einführung einer geeigneten Sprungfunktion im Integranden formal beseitigen, doch sind die besonderen Lösungsmethoden für

solche Integralgleichungen hier unzuweckmäßig, da die Kerne numerisch gegeben sind. Einmaliges Differenzieren und Umordnen führt z. B. bei (6.34) auf

$$(\zeta_{ab}^{(1)}(Z) - Z \delta_{ab}) \sigma_b^{Q*}(Z) = -\frac{d\zeta_{ab}^{(1)}}{dZ} \{\sigma_b^{Q*}(z)\} - \frac{dM_a}{dZ} \quad (6.45)$$

eine Form, die sich wohl ebensogut für die Programmierung auf Analogie-Rechenmaschinen wie für ziffernmäßige Iterationsverfahren eignen dürfte. Durch weitere Umformungen und eine Differentiation kann man (6.45) weiter auf einen Satz gekoppelter linearer Differentialgleichungen der Form

$$\frac{d\sigma_a^{Q*}}{dZ} = A_{ab}(Z) \sigma_b^{Q*}(Z) + B_a(Z) \quad (6.46)$$

zurückführen, doch ist deren praktischer Wert für die Lösung zweifelhaft angesichts der weitgehend nichtanalytischen Natur der gegebenen Funktionen (z. B. Diskontinuitäten an Schichtgrenzen; vgl. Anm.***) S. 60).

Für den Fall einer homogenen Platte haben Treuting und Read [27] die Lösung auf Differentiationen und Quadraturen gegebener Funktionen zurückgeführt; in diesem Fall wird nach (6.29) aus (6.45) (und entsprechend im Fall c), nicht aber im Fall d))

$$\frac{Z}{2} \sigma_a^{Q*}(Z) - \frac{1}{2} \{\sigma_a^{Q*}(z)\} = \frac{dM_a}{dz} \quad (6.47)$$

Durch Multiplikation mit $\frac{2}{Z^2}$ wird die linke Seite ein vollständiges Differential; nach einigen einfachen Umrechnungen und einer partiellen Integration folgt

$$\{\sigma_a^{Q*}(Z)\} = \frac{2}{Z} M_a(Z) + Z \left\{ \frac{4 M_a(z)}{z^3} \right\} \quad (6.48)$$

was beim Einsetzen in (6.47) auf die gesuchte Lösung führt.

Ein prinzipiell ähnliches Verfahren ist in allen Fällen möglich, in denen die ζ -Matrix nur Diagonalglieder enthält. Denn dann zerfallen (6.45) und die entsprechenden Gleichungen zu (6.40) und (6.43) jeweils in drei getrennte Gleichungen für die einzelnen Komponenten von $\{\sigma_a^{Q*}(z)\}$, welche sich nach den bekannten Methoden für lineare Differentialgleichungen durch Quadraturen lösen lassen. Über die praktische Zweckmäßigkeit dieses Verfahrens kann nur im Einzelfalle entschieden werden.

7. In der Plattenebene langsam veränderliche Eigenspannungen

Die Gleichgewichtsbedingung des dreidimensionalen Spannungszustandes lautet mit Voigtschen Indizes ausgedrückt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1^G}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_6^G}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_5^G}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_6^G}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2^G}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_4^G}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_5^G}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_4^G}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_3^G}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Aus den ersten beiden Gleichungen erkennt man, daß jede Veränderlichkeit von σ_1^G , σ_2^G und σ_6^G notwendig mit Schubspannungen in der Plattenebene verknüpft ist. Die lineare Plattentheorie bleibt nun so lange gültig, als man diese Schubspannungen in ihrer Auswirkung auf die Verformung gegenüber den anderen vernachlässigen kann; aus der dritten Gleichung folgt dann, daß Zug- und Druckspannungen senkrecht zur Plattenebene erst recht klein sein müssen. Als „*langsam veränderlich*“ sollen Beanspruchungsgrößen bezeichnet werden, die diese Bedingung erfüllen.

Bei homogenen Platten und bei Verbundplatten, deren elastische Konstanten sich über den Querschnitt nicht um Größenordnungen ändern, gilt für die Größenordnungen der Spannungskomponenten nach (7.1) bis auf die Nullstellen des Biegemoments und deren nächste Umgebung

$$O(\sigma_1^G, \sigma_2^G) = O\left(Z \frac{\partial \sigma_1^G}{\partial x}, Z \frac{\partial \sigma_2^G}{\partial y}, Z \frac{\partial \sigma_6^G}{\partial x}, Z \frac{\partial \sigma_6^G}{\partial y}\right) \quad (7.2)$$

also für den Gültigkeitsbereich der linearen Plattentheorie im Mittel

$$Z \frac{\partial \sigma_1^G}{\partial x}, Z \frac{\partial \sigma_2^G}{\partial y}, Z \frac{\partial \sigma_6^G}{\partial x}, Z \frac{\partial \sigma_6^G}{\partial y} \ll \sigma_1^G, \sigma_2^G, \sigma_6^G \quad (7.3)$$

Im allgemeinen Fall muß diese Abschätzung noch durch die Forderung verschärft werden, daß die durch die Schubspannungen in der Plattenebene hervorgerufenen Verformungen vernachlässigbar klein sein müssen gegenüber denen, die von den Spannungen in Schnitten senkrecht zur Plattenebene herrühren. Die Bedeutung des Unterschieds gegenüber (7.3) macht man sich leicht an einer Verbundplatte klar, die aus mehreren Lagen Gummi und sehr dünnen Stahlblechs zusammengesetzt ist.

Veränderliche Scheibendehnungen und Krümmungen müssen nun die Kompatibilitätsbedingungen, veränderliche Scheibenspannungen und Biegemomente die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, was man durch Ableitung aus den Verschiebungen und den Spannungsfunktionen erreichen kann. Bezeichnet man in Anlehnung an Schaefer [24] die Verschiebungen mit v_x , v_y , v_z und die Spannungsfunktionen mit Φ_x , Φ_y , Φ_z^1 , so wird aus den Matrizen (6.1)–(6.4)

$$\begin{bmatrix} \overline{e_1^G} \\ \overline{e_2^G} \\ \overline{e_6^G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\varepsilon_{xx}^G} \\ \overline{\varepsilon_{yy}^G} \\ 2\overline{\varepsilon_{xy}^G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

¹⁾ Die Indizes 1, 2, 3 bei Schaefer sind hier durch x , y , z ersetzt. Die ähnliche Bezeichnung des Azimutwinkels der Magnetisierung in den vorhergehenden Abschnitten und der Spannungsfunktionen dürfte wohl kaum zu Verwechslungen Anlaß geben.

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa_{yy} \\ -\kappa_{xx} \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} \\ \Sigma_{yy} \\ \Sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_{yy} \\ -M_{xx} \\ +M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Phi_y}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} \right) \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Jetzt schreibt sich (6.17) mit den Abkürzungen (6.6) und (6.33)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} \right) \end{pmatrix} = (K_{\alpha\beta}) \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ -\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \{\sigma_1^{Q*}\} \\ \{\sigma_2^{Q*}\} \\ \{\sigma_6^{Q*}\} \\ \{z\sigma_1^{Q*}\} \\ \{z\sigma_2^{Q*}\} \\ \{z\sigma_6^{Q*}\} \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

Bei gegebenen Extradrehungen bzw. modifizierten Extraspannungen hat man also ein System von sechs gekoppelten linearen Differentialgleichungen für die sechs unbekannten Funktionen v_x, v_y, v_z und Φ_x, Φ_y, Φ_z ; an die Stelle der inneren Scheibenspannungen und Biegemomente der letzten Spaltenmatrix können auch äußere, durch eine Integration aus Flächenkräften gewonnene Scheibenspannungen und Biegemomente treten, welche anschließend

der Gesamtspannung zuzurechnen sind. Verschwindet die letzte Matrix überhaupt, so hat man die linearen Differentialgleichungen für das Randwertproblem der durch Randmomente und Randkräfte belasteten anisotropen Verbundplatte. Für alle diese Aufgabenstellungen bleibt die von *Schaefer* [24] für den homogenen Fall gefundene Analogie von Scheiben- und Platten Spannungszustand bis auf einige unwesentliche, durch die Schreibweise der Matrizen bedingte Äußerlichkeiten erhalten¹⁾; auch hier wird also mit jedem Einzelproblem ein zweites gelöst, das aus dem ursprünglichen durch Vertauschung geometrischer und statischer Größen hervorgeht (und hier allerdings mit dem ersten identisch sein kann).

Für die umgekehrte Aufgabenstellung, nämlich die Bestimmung der Eigenspannungen aus der Änderung von Krümmung und Scheibendehnung während des Abtragungsversuchs, ergibt sich, daß die Messung von Krümmung oder Scheibendehnung für sich allein nicht mehr ausreicht; es müssen wenigstens eine Krümmungskomponente und zwei Scheibendehnungskomponenten von Punkt zu Punkt gemessen werden, um bei Vorgabe der zusätzlich noch zu messenden Randwerte der anderen Komponenten durch Integration die Verschiebungen zu bestimmen. Einfacher dürfte es in den meisten Fällen sein, alle Scheibendehnungen und Krümmungen unmittelbar zu messen. Damit ist die erste Spaltenmatrix der rechten Seite als Funktion von Z bekannt, und das Matrizenprodukt kann ausmultipliziert werden. Differenziert man nun nach Z , so erhält man, wenn man die Ableitungen der Spannungsfunktionen Φ_x, Φ_y, Φ_z nach der Plattendicke Z mit $\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z$ bezeichnet, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi'_x}{\partial y^2} &= A_1(x, y, Z) + \sigma_1^{Q*}(x, y, Z); & -\frac{\partial \Phi'_y}{\partial y} &= A_4(x, y, Z) + Z \sigma_1^{Q*}(x, y, Z) \\ \frac{\partial^2 \Phi'_z}{\partial x^2} &= A_2(x, y, Z) + \sigma_2^{Q*}(x, y, Z); & -\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} &= A_5(x, y, Z) + Z \sigma_2^{Q*}(x, y, Z) \\ -\frac{\partial^2 \Phi'_z}{\partial x \partial y} &= A_3(x, y, Z) + \sigma_6^{Q*}(x, y, Z); \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi'_y}{\partial x} + \frac{\partial \Phi'_x}{\partial y} \right) &= A_6(x, y, Z) + Z \sigma_6^{Q*}(x, y, Z) \end{aligned} \quad (7.9)$$

wo die A_α aus den Meßwerten und den elastischen Konstanten berechnete Funktionen von x und y sind. Elimination der Spannungsfunktions-Ableitungen führt auf partielle lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung für die einzelnen Komponenten der Extraspannung, auf deren Lösung hier nicht weiter eingegangen werden soll. Wie man sieht, wird die Aufgabe der Eigen-

¹⁾ Auch diese äußerlichen Unsymmetrien könnte man durch einige Umdefinitionen in den Spalten unter gleichzeitiger entsprechender Abänderung der Matrix $K_{\alpha\beta}$ beseitigen, etwa durch Vertauschung und Vorzeichenwechsel der 4. und 5. Spalte und Zeile in allen Matrizen, Halbierung des letzten Gliedes der ersten Spaltenmatrix auf der rechten Seite und Verdopplung der sechsten Spalten und Zeilen aller übrigen Matrizen (d. h. also z. B. Vervielfachung von K_{66}). Praktisch sind diese Schönheitsoperationen ohne Bedeutung, könnten aber beim Übergang zum Dreidimensionalen leicht zu Fehlern führen.

spannungsbestimmung bei Veränderlichkeit in der Plattenebene für Messung und Rechnung gleich wesentlich komplizierter; wo es irgend möglich ist, wird man daher die Probe in Stücke zerschneiden, innerhalb deren die Eigenspannungen als konstant angesehen werden können. Allerdings gehen bei dieser Aufteilung die durch den Zusammenhang der einzelnen Stücke bedingten Spannungen verloren; man kann sie aber bestimmen, wenn man Krümmungs- und Dehnungsänderungen während dieser Zerschneidung mißt und hat dann das Eigenspannungsproblem der Plattenebene nur einmal zu lösen. Eine Grenze wird diesem Verfahren durch die Forderung genügend weiter Entfernung der Meßstelle vom Rand gesetzt.

Nicht mit den relativ einfachen Mitteln des vorhergehenden Abschnitts behandeln läßt sich auch die Eigenspannungsmessung an einem (z. B. aus einer geschichteten Platte herausgeschnittenen) Verbundbalken mit vergleichbarer Breite und Höhe. Hier muß für jeden Abtragungsschritt die Änderung des i. allg. durchaus nicht mehr einfachen Spannungszustandes im Balkenquerschnitt bestimmt werden; bei isotropem Material kommen dafür nach Hinzufügen von Zusatzbiegungen, Zusatztorsion und Querschnittswölbung die *Holzmannschen* Ansätze für den ebenen Verzerrungszustand in Frage [29]. Im anisotropen Material sind die Zusatzgrößen außerdem noch auf komplizierte Weise untereinander verknüpft [5]. Schließlich sei noch auf eine weitere Gültigkeitsgrenze der linearen Theorie ebener geschichteter Platten hingewiesen, die sich aus der für Verbundplatten typischen Kopplung von Scheiben- und Plattenverformung ergibt und verlangt, daß die durch das Zusammenwirken von Scheibenspannung und Auswölbung zusätzlich auftretenden Biegemomente keine den vor der Verkrümmung vorhandenen Biegemomenten vergleichbare Größe erreichen dürfen.

*) Zu S. 27: Auf analoge Weise kommt *Eshelby* [32] zu der (2.16) entsprechenden Formel (1) a. a. O. für die modifizierten Elastizitätskoeffizienten s_{ab}' im „inversen“ Problem des ebenen Dehnungszustandes. Die von *Eshelby* benutzte *Schweinsche* Entwicklung ist auch auf (2.16) anwendbar, ebenso wie zur Berechnung von s_{ab}' den Gleichungen (2.24)–(2.26) entsprechende Formeln in den c_{ab} .

**) Zu S. 56: Eine von Iterationen freie, rein rekursive numerische Lösung von (6.45) erlaubt in der einfachen Differenzen-Näherung die Gleichung (6.19), angeschrieben für die ursprüngliche Plattendicke Z_0 . Mit den Abkürzungen (6.10) und (6.33) folgt

$$\{\sigma_a^{Q*}\} = - \int_Z^{Z_0} \sigma_a^{Q*}(z) dz - \int_0^{Z_0} C^*_{ab}(z) dz \cdot \overline{e}_b^G(Z_0)$$

wobei $\overline{e}_b^G(Z_0)$, zumindest vorläufig, für die Rechnung gleich Null gesetzt werden kann. Setzt man dies in (6.45) ein, so läßt sich σ_a^{Q*} in der zuletzt abgetragenen Schicht ΔZ auf den Zuwachs ΔM_a des Biegemoments und die bereits bestimmten Werte von σ_a^{Q*} in den vorher abgetragenen Schichten zurückführen. Entsprechend kann man auch in den Fällen c) und d) durch Differenzieren von (6.40) bzw. (6.43) und Einsetzen von $\{\sigma_a^{Q*}(z)\}$ mit Hilfe von (6.36) zu einer rekursiven numerischen Lösung kommen.

Literatur

- [1] *E. Kröner*: Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer 1958.
- [2] *G. Rieder*: *Z. Naturforschung 11a* (1956), S. 171.
- [3] *E. Kröner*: *Z. Physik 151* (1958), S. 504.

- [4] *G. Rieder*: Z. angew. Physik 9 (1957), S. 187.
- [5] *W. Voigt*: Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig—Berlin, Teubner 1910. Vgl. auch *J. F. Nye*: Physical properties of crystals. Their representation by tensors and matrices. Oxford, Clarendon Press 1957.
- [6] *A. Sommerfeld*: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. II, Mechanik der deformierbaren Medien, bearbeitet und ergänzt von *E. Fues*, Leipzig, Geest & Portig 1957.
- [7] *G. Rieder*: Z. angew. Physik 10 (1958), S. 140.
- [8] *H. J. Mähly*: Ergebn. exakt. Naturw. 24 (1951), S. 402.
- [9] *R. Becker und W. Döring*: Ferromagnetismus. Berlin, Springer 1939.
- [10] *C. Kittel*: Rev. Mod. Phys. 21 (1949), S. 541.
- [11] *P. K. Baltzer*: Phys. Rev. 103 (1957), S. 580.
- [12] *B. A. Lilley*: Phil. Mag. (7) 41 (1950), S. 792.
- [13] *G. Rieder*: Z. Naturforschung, 14a (1959), S. 96.
- [14] *E. C. Stoner*: Phys. Soc. Rep. Progr. Physics 13 (1950), S. 83.
- [15] *E. W. Lee*: Phys. Soc. Rep. Progr. Physics 18 (1955), S. 184.
- [16] *W. P. Mason*: Phys. Rev. 96 (1954), S. 309;
ibid. 82 (1951), S. 715.
- [17] *A. E. H. Love*: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th Edition. Cambridge, University Press 1952.
- [18] *M. Lagally*: Vorlesungen über Vektorrechnung, Leipzig, Geest & Pörtig 1949.
- [19] *A. Seeger und G. Schöck*: Acta Met. 1 (1953), S. 519.
- [20] *A. E. Green und W. Zerna*: Theoretical Elasticity, Oxford, Clarendon Press 1954.
- [21] *G. Rieder*: In Vorbereitung. Vgl. auch: Berichte der Arbeitsgemeinschaft Ferromagnetismus 1959 (Tagung Berlin), Stuttgart, Dr. Riederer-Verlag, im Druck.
- [22] *M. Kersten*: Z. angew. Physik 8 (1956), S. 496.
- [23] *L. Néel*: Ann. Univ. Grenoble 22 (1947), S. 299.
- [24] *H. Schaefer*: Abh. Braunschwg. Wiss. Ges. 8 (1956), S. 142.
- [25] *G. Colonnetti*: Atti Acad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., V., Ser. 24/1 (1915), S. 404.
- [26] *H. Hackmann*: Mündl. Mitt.
- [27] *R. G. Treuting und W. T. Read*: Journ. Appl. Phys. 22 (1951), S. 130.
- [28] *W. Leaf*: Proc. Soc. Exp. Stress Analysis 9, N. 2 (1951), S. 133.
D. J. Demorest und D. O. Leiser: ibid. 11, No. 1 (1953), S. 45.
- [29] *G. Holzmann*: Dissertation, Braunschweig 1956.
- [30] *J. Kaczér*: J. Physique Rad. 20 (1959), S. 120.
- [31] *F. Vicena*: Czech. Journ. Phys. 4 (1954) S. 419; ibid. 5 (1955), S. 11, S. 480.
- [32] *J. D. Eshelby*: Phil. Mag. (7) 40 (1949), S. 903.